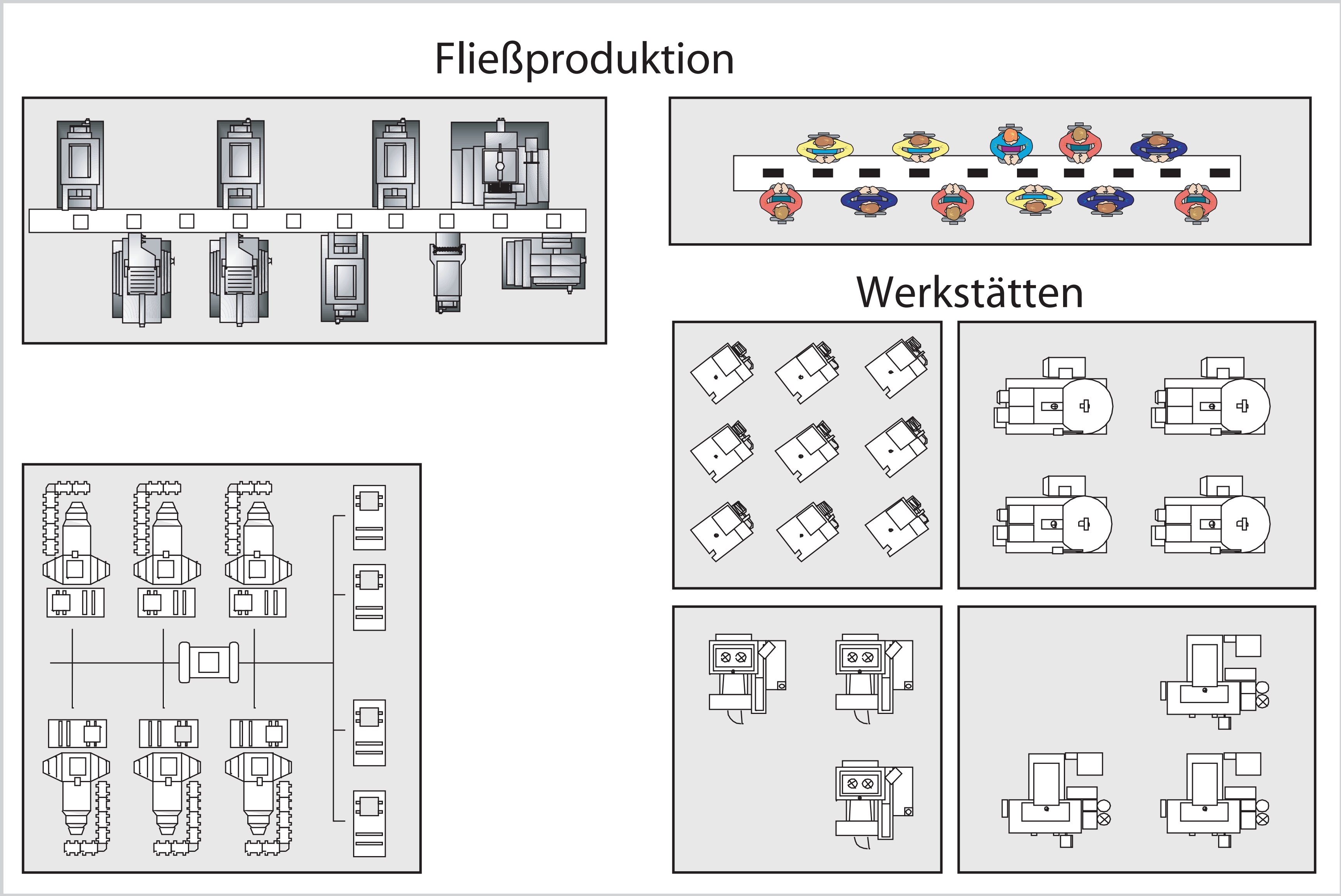
Konfigurations- bzw. Kapazitätsplanung („Prozessdesign“): Planung der Materialflüsse



(Quelle: Günther/Tempelmeier (2007))

innerbetriebliche Standortplanung
= optimale **Zuordnung** von Anordnungsobjekten **zueinander**
= **Plazierung** einer Menge von **Anordnungsobjekten**, d. h. von

- Produktionssegmenten oder
- Arbeitssystemen innerhalb eines Produktionssegments,

zwischen denen **Materialflussbeziehungen** bestehen, ggf. unter Berücksichtigung von bestimmten Anordnungsbedingungen:

- relative ∼ in bezug auf bestimmte Anordnungsobjekte
- absolute ∼ in bezug auf bestimmte Standorte

innerbetriebliche Standortplanung
= optimale **Zuordnung** von Anordnungsobjekten **zueinander**
= **Plazierung** einer Menge von **Anordnungsobjekten**, d. h. von

- Produktionssegmenten oder
- Arbeitssystemen innerhalb eines Produktionssegments,

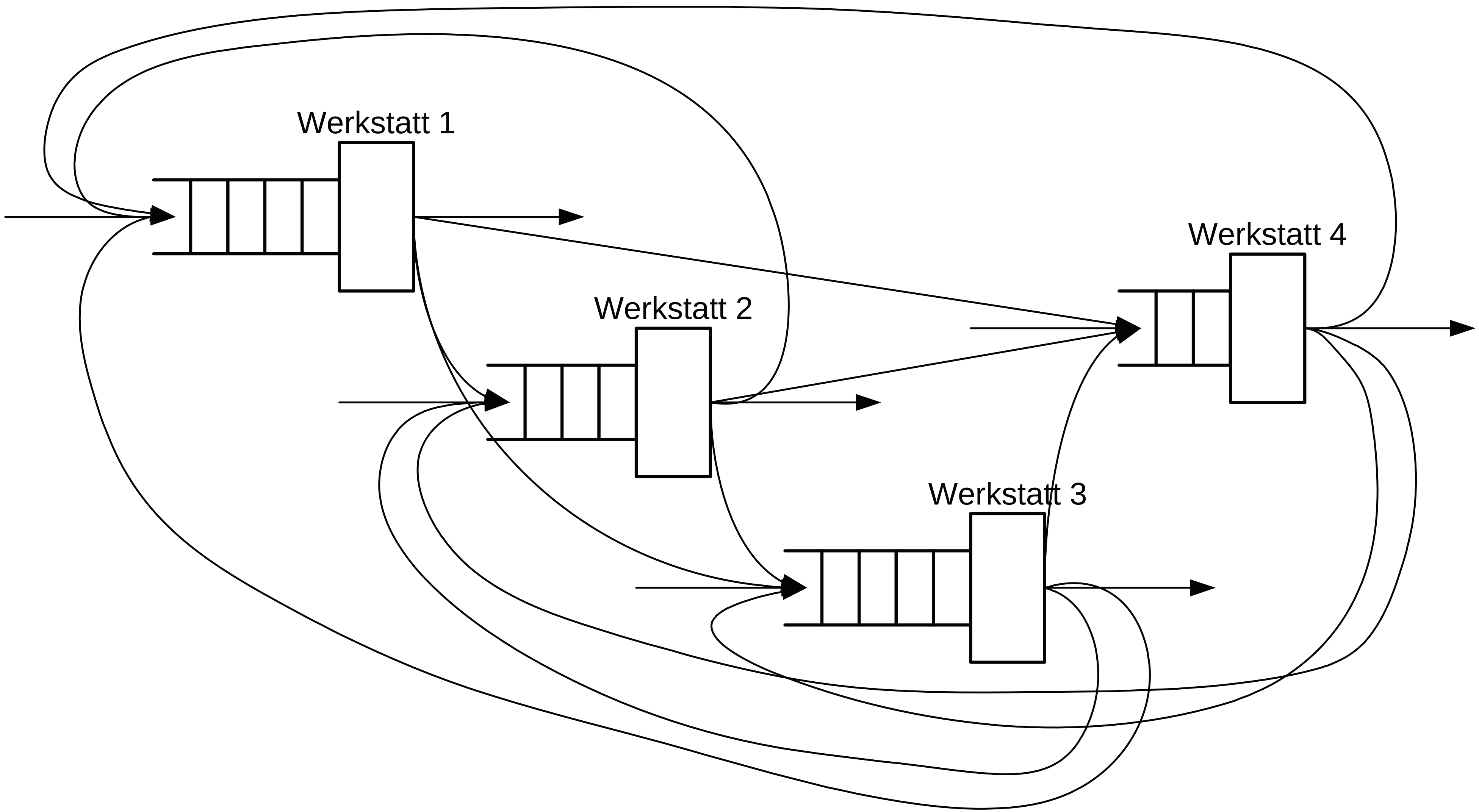
zwischen denen **Materialflussbeziehungen** bestehen, ggf. unter Berücksichtigung von bestimmten Anordnungsbedingungen:

- relative $\sim$ in bezug auf bestimmte Anordnungsobjekte
- absolute $\sim$ in bezug auf bestimmte Standorte

Ziel: Minimierung der

- Transportentfernungen
- Transportmengen
- Transportleistung (= Entfernung $\cdot$ Menge)
- Transportkosten (= Leistung $\cdot$ Kostensatz)

vernetzter Materialfluss



Warteschlangensysteme

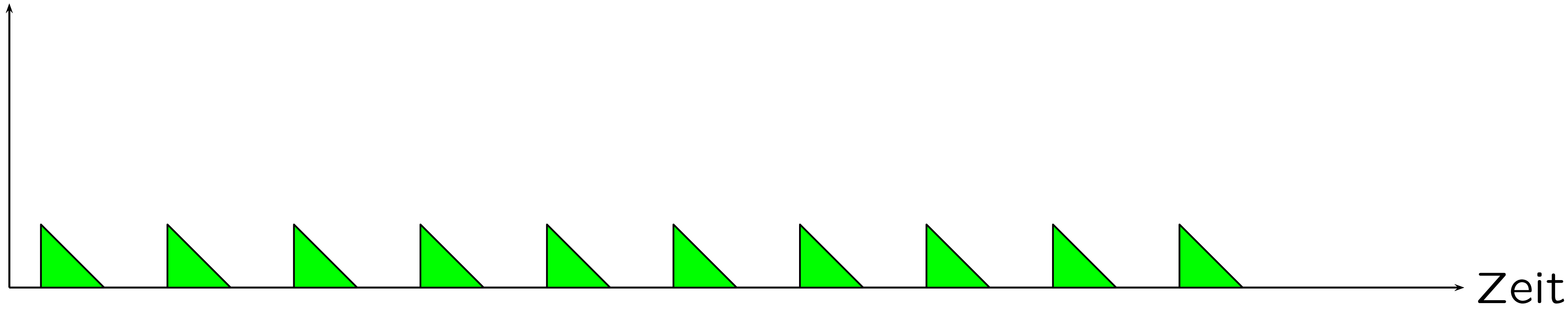
Werkstücke („Items“) bzw. Kunden- oder Produktionsaufträge („Jobs“) — bei Dienstleistungsproduktion sind das i. d. R. die Kunden/Abnehmer selbst — warten auf Bearbeitung bzw. auf Service.

Werkstücke („Items“) bzw. Kunden- oder Produktionsaufträge („Jobs“) — bei Dienstleistungsproduktion sind das i. d. R. die Kunden/Abnehmer selbst — warten auf Bearbeitung bzw. auf Service.

Bei perfekter Planung („Scheduling“) kann das Kapazitätsangebot exakt auf die -nachfrage abgestimmt werden. Dies gelingt aber auch nur unter besonders günstigen Bedingungen.

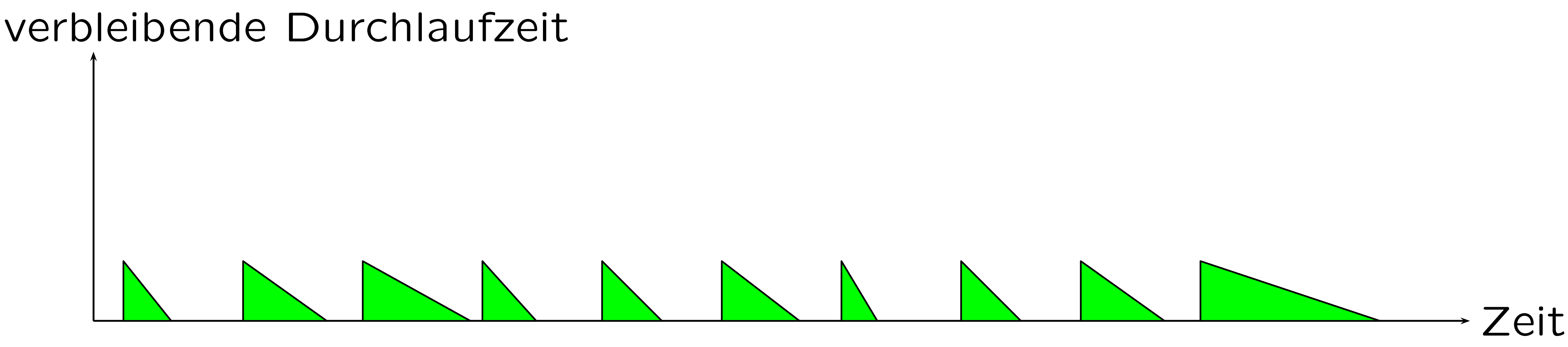
Hinzukommende stochastische Einflüsse führen unvermeidlich zu Warteschlangen.

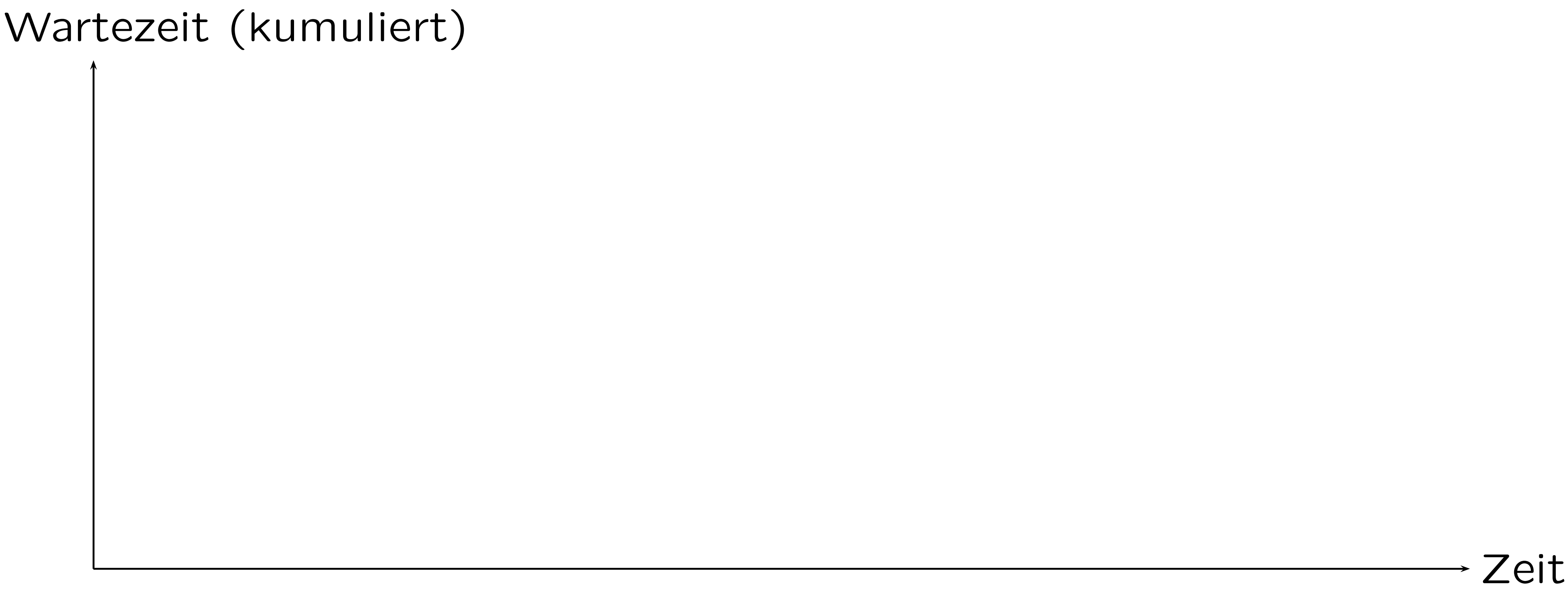
verbleibende Durchlaufzeit



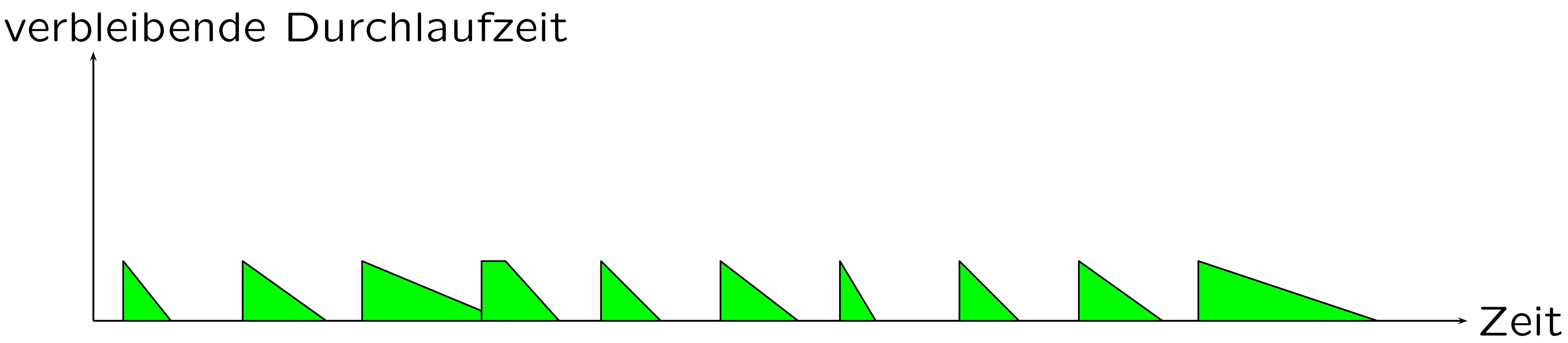
Wartezeit (kumuliert)

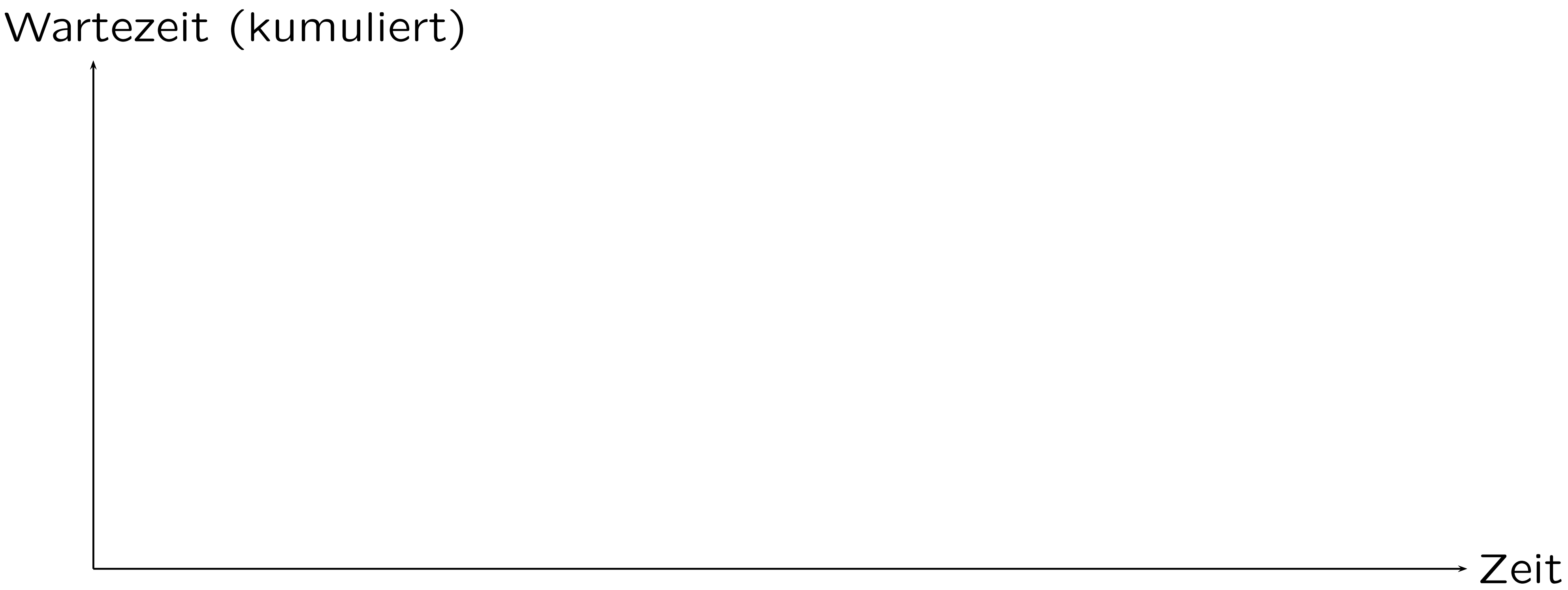
(Furmans (2013))



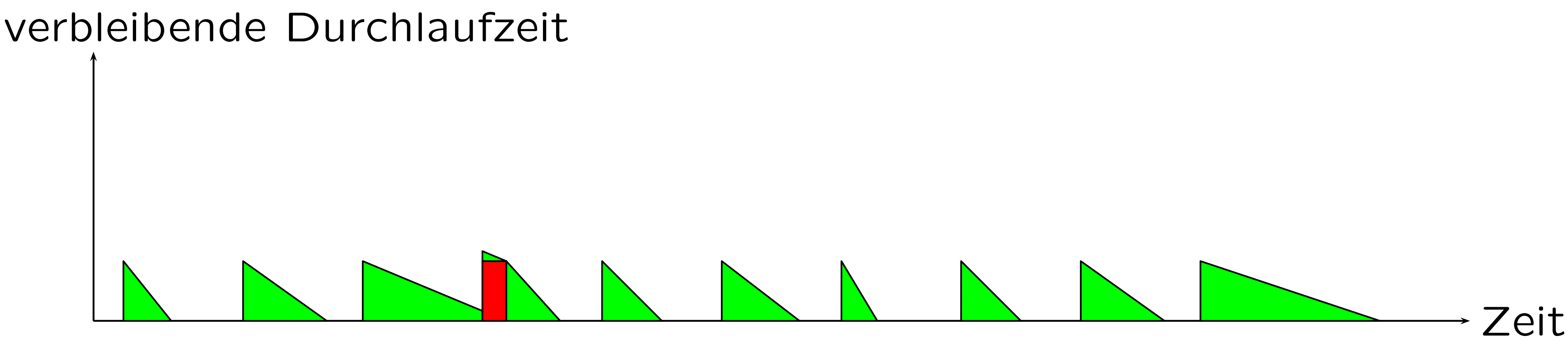


(Furmans (2013))





(Furmans (2013))



(Furmans (2013))

Warteschlangen gibt es

- an Bank-, Post- und Behördenschaltern etc.,
- an der Wursttheke und an der Kasse im Supermarkt,
- an Maschinen und Werkstätten im Produktionsbereich,
- im Puffer vor den Stationen eines Fließproduktionssystems
- u. v. a. m.

- Die Kunden haben gewisse Servicewünsche, bzw. es wird eine bestimmte Erzeugnisvariante verlangt.

Ursachen für Warteschlangen

- Die Kunden haben gewisse Servicewünsche, bzw. es wird eine bestimmte Erzeugnisvariante verlangt.
- Die Erfüllung der Servicewünsche verlangt eine gewisse Bedienzeit (Servicezeit, Bearbeitungszeit).

Ursachen für Warteschlangen

- Die Kunden haben gewisse Servicewünsche, bzw. es wird eine bestimmte Erzeugnisvariante verlangt.
- Die Erfüllung der Servicewünsche verlangt eine gewisse Bedienzeit (Servicezeit, Bearbeitungszeit).
- Die Kundenaufträge kommen in gewissen Zeitabständen an, bzw. es herrscht asynchroner Materialfluss vor.

- Die Kunden haben gewisse Servicewünsche, bzw. es wird eine bestimmte Erzeugnisvariante verlangt.
- Die Erfüllung der Servicewünsche verlangt eine gewisse Bedienzeit (Servicezeit, Bearbeitungszeit).
- Die Kundenaufträge kommen in gewissen Zeitabständen an, bzw. es herrscht asynchroner Materialfluss vor.

Zufällige Schwankungen ($\Longrightarrow$ Stochastizität) !

Aufbau von Warteschlangen

- Die Kunden haben ausgefallene, spezielle Servicewünsche.

Aufbau von Warteschlangen

- Die Kunden haben ausgefallene, spezielle Servicewünsche.
- Die Erfüllung der Servicewünsche dauert außergewöhnlich lange.
- Es kommen gerade mehr Kunden an, als bedient werden können.

Aufbau von Warteschlangen

- Die Kunden haben ausgefallene, spezielle Servicewünsche.
- Die Erfüllung der Servicewünsche dauert außergewöhnlich lange.
- Es kommen gerade mehr Kunden an, als bedient werden können.

Abbau von Warteschlangen

Aufbau von Warteschlangen

- Die Kunden haben ausgefallene, spezielle Servicewünsche.
- Die Erfüllung der Servicewünsche dauert außergewöhnlich lange.
- Es kommen gerade mehr Kunden an, als bedient werden können.

Abbau von Warteschlangen

- Die Kunden haben Standard-Servicewünsche.
- Die Erfüllung der Servicewünsche geht außergewöhnlich schnell.
- Es kommen gerade weniger Kunden an, als bedient werden können.

Aufbau von Warteschlangen

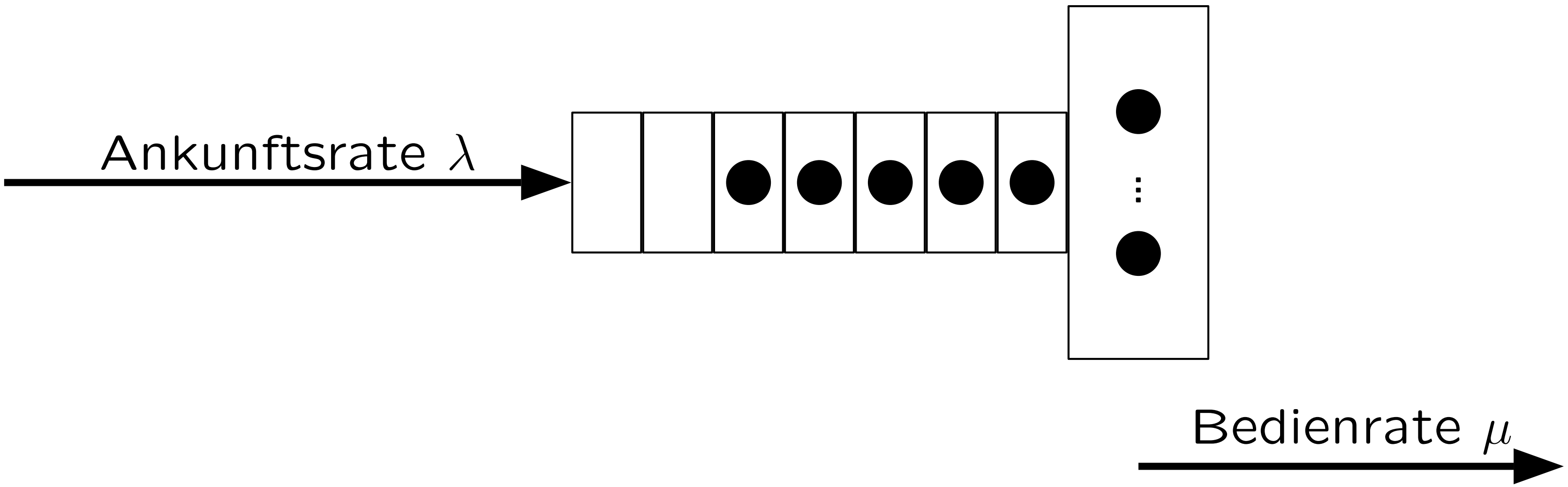
- Die Kunden haben ausgefallene, spezielle Servicewünsche.
- Die Erfüllung der Servicewünsche dauert außergewöhnlich lange.
- Es kommen gerade mehr Kunden an, als bedient werden können.

Abbau von Warteschlangen

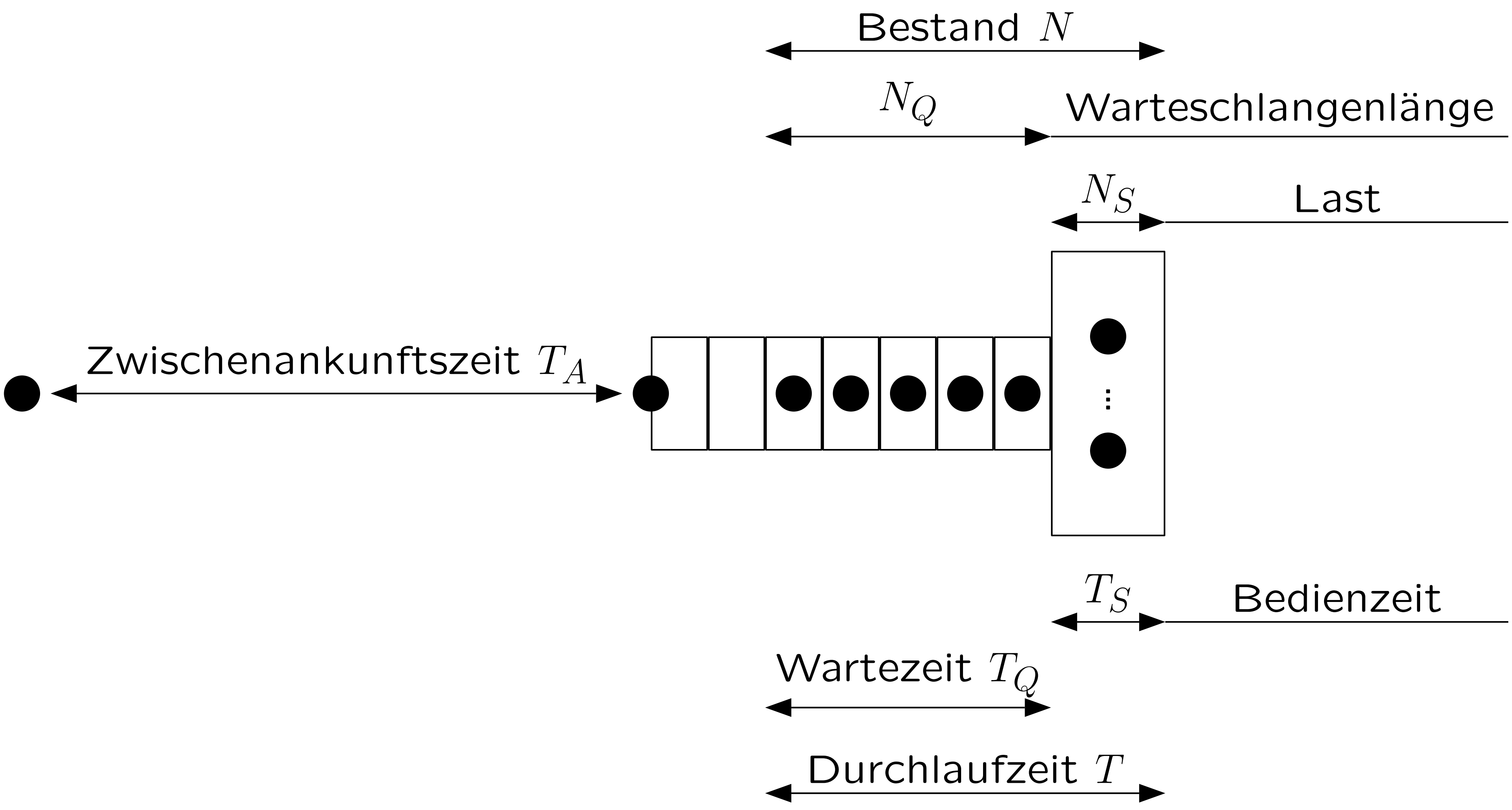
- Die Kunden haben Standard-Servicewünsche.
- Die Erfüllung der Servicewünsche geht außergewöhnlich schnell.
- Es kommen gerade weniger Kunden an, als bedient werden können.

Das **Zusammenwirken dieser stochastischen Effekte** ist nicht exakt vorhersagbar !

Eine **zeitliche Koordination** von Servicewünschen und entsprechendem Kapazitätsangebot der Serviceeinrichtung ist nicht möglich !

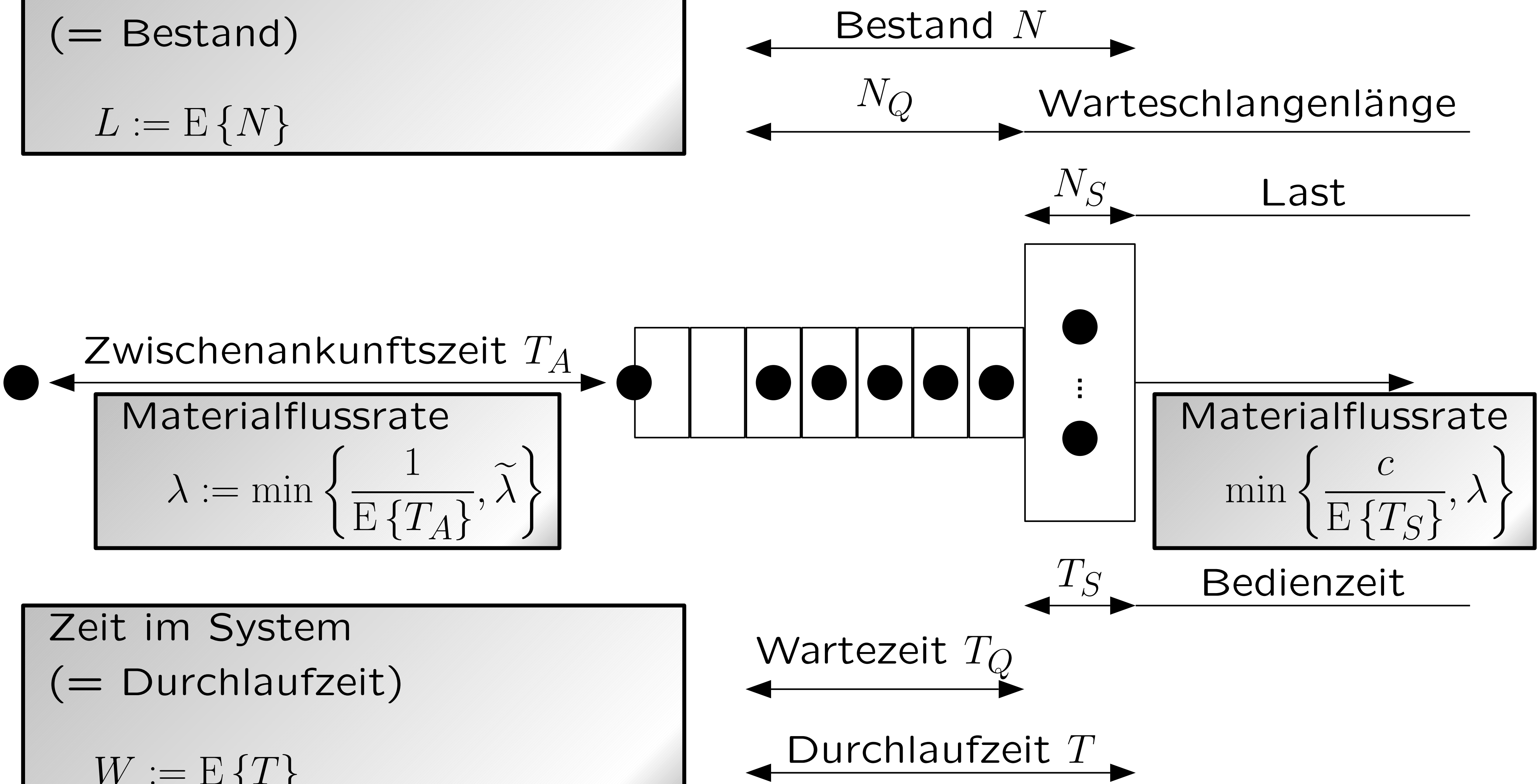

Ankunftsrate λ
Bedienrate μ

Warteschlangensystem



Anzahl Kunden im System
(= Bestand)

$$L := \mathrm{E}\{N\}$$

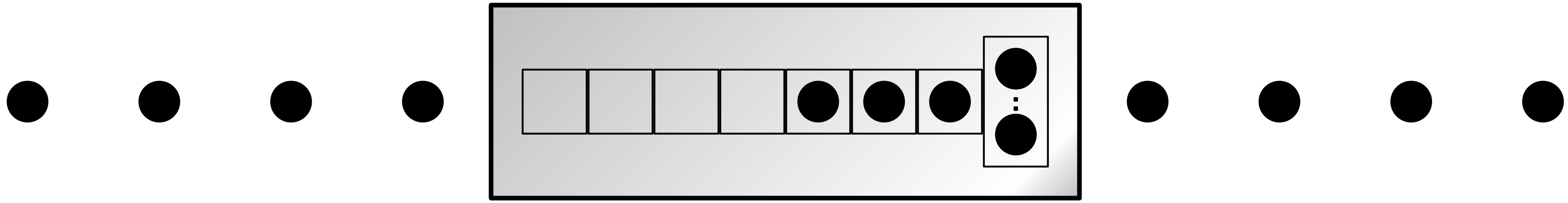


Zeit im System
(= Durchlaufzeit)

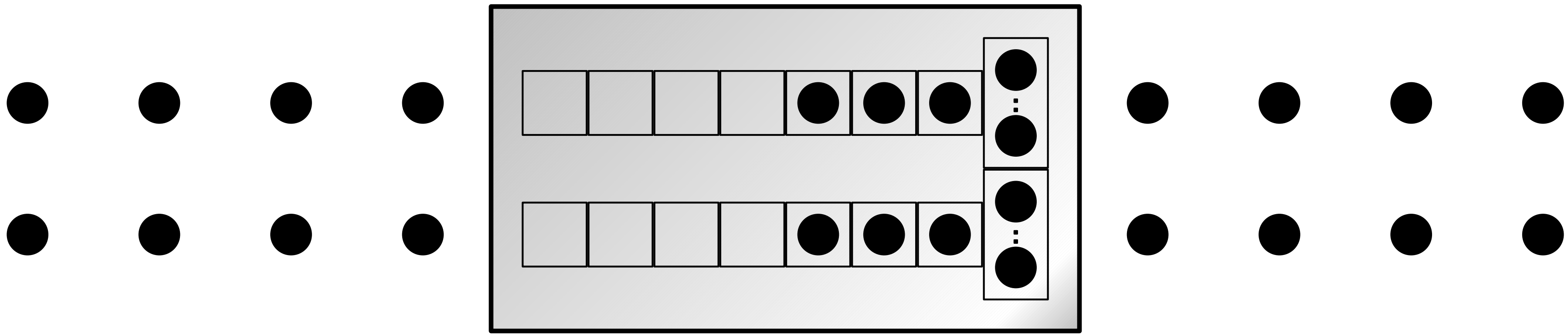
$$W := \mathrm{E}\{T\}$$

Littles Gesetz

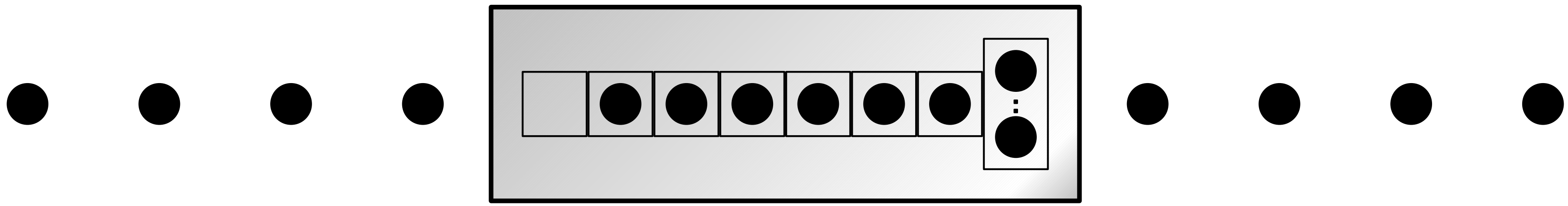
Bestand L = Materialflussgeschwindigkeit $\lambda \cdot$ Durchlaufzeit W

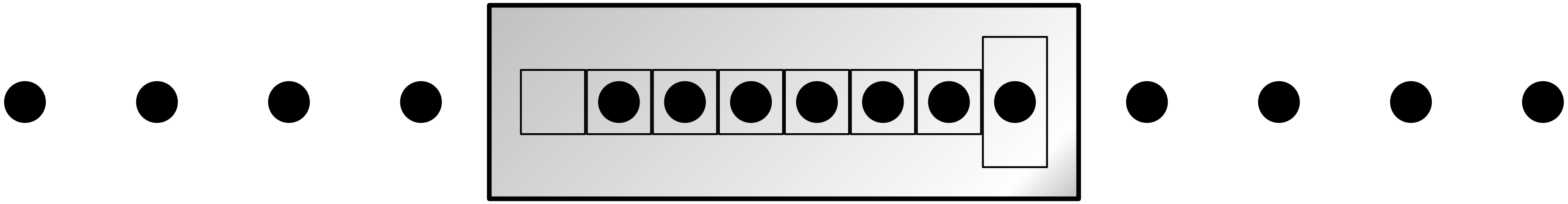


Doppelter Durchsatz bei gleicher Durchlaufzeit ($\rightarrow$ doppelter Bestand):



Gleicher Durchsatz bei erhöhter Durchlaufzeit ($\rightarrow$ gestiegener Bestand):





Auslastung (Workload Rate) (bei nur einem Server)

$$\rho = \mathrm{E}\left\{T_S\right\} \cdot \frac{1}{\mathrm{E}\left\{T_A\right\}} = \frac{\lambda}{\mu}$$

Bedienrate (Service Rate)

$$\mu = \frac{1}{\mathrm{E}\left\{T_S\right\}}$$

Ankunftsrate (Arrival Rate)

$$\lambda = \frac{1}{\mathrm{E}\left\{T_A\right\}}$$

[Spezialfall:]

- exponentialverteilte Zwischenankunftszeiten (Poisson-Ankunftsprozess)
  - Anzahl X ankommender Werkstücke ist poissonverteilt mit Rate λ

[Spezialfall:]

- exponentialverteilte Zwischenankunftszeiten (Poisson-Ankunftsprozess)
  - Anzahl X ankommender Werkstücke ist poissonverteilt mit Rate λ

$$\mathrm{P}\left[X=1\right]=\mathrm{P}\left[N(t+\Delta t)-N(t)=1\right]\approx\lambda\,\Delta t$$

- exponentialverteilte Bearbeitungszeiten
  - Anzahl Y fertiger Werkstücke (wenn n Server arbeiten) ist poisson-verteilt mit Rate $n\cdot\mu$
- 1 Server

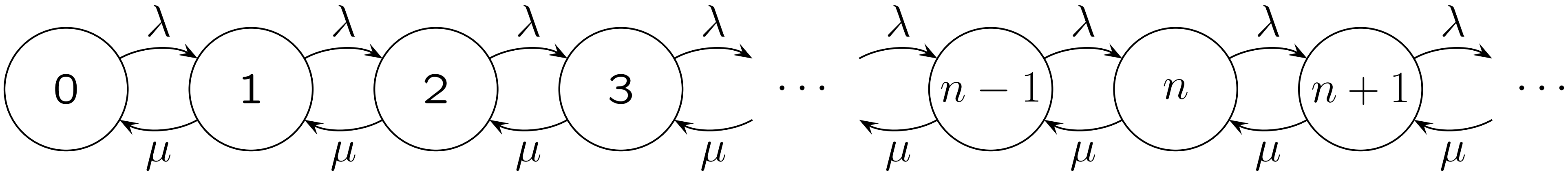
$$\mathrm{P}\left[Y=1\right]=\mathrm{P}\left[N(t+\Delta t)-N(t)=-1\right]\approx\mu\,\Delta t$$

$\Longrightarrow$ M/M/1-Warteschlangensystem

- unbeschränkter Warteraum, unbeschränkte Kundenquelle, FCFS-Warteschlangendisziplin (FCFS = first come first served)

M/M/1-Warteschlangensystem

Bestandsentwicklung



Auslastung

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \cdot \mathrm{E}\{T_S\}$$

Zustandswahrscheinlichkeiten

$$P_n = \mathrm{P}[N = n] = P_{n-1} \cdot \rho = P_0 \cdot \rho^n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$P_0 = \mathrm{P}[N = 0] = 1 - \rho$$

erwarteter Bestand im System

$$L = \mathrm{E}\{N\} = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

Littles Gesetz: $L = \lambda \cdot W$

erwartete Durchlaufzeit

$$W = \mathrm{E}\{T\} = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu \cdot (1 - \rho)}$$

Auslastung

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \cdot \mathrm{E}\{T_S\}$$

Zustandswahrscheinlichkeiten

$$P_n = \mathrm{P}[N = n] = P_{n-1} \cdot \rho = P_0 \cdot \rho^n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$P_0 = \mathrm{P}[N = 0] = 1 - \rho$$

erwartete Warteschlangenlänge

$$L_Q = \mathrm{E}\{N_Q\} = L - \mathrm{E}\{N_S\} = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$$

Auslastung

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \cdot \mathrm{E}\{T_S\}$$

Zustandswahrscheinlichkeiten

$$P_n = \mathrm{P}[N = n] = P_{n-1} \cdot \rho = P_0 \cdot \rho^n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$P_0 = \mathrm{P}[N = 0] = 1 - \rho$$

erwartete Warteschlangenlänge

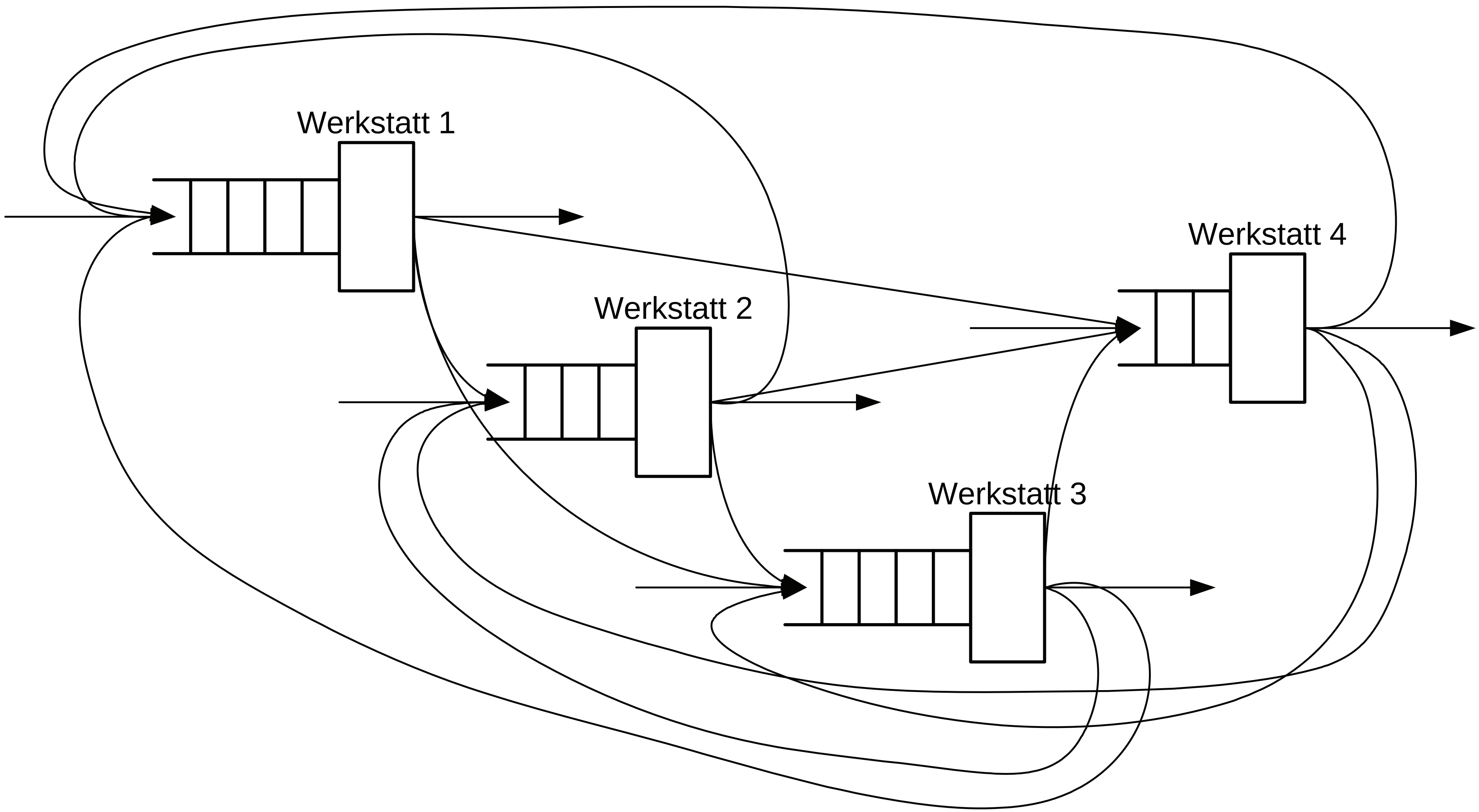
$$L_Q = \mathrm{E}\{N_Q\} = L - \mathrm{E}\{N_S\} = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$$

Littles Gesetz: $L_Q = \lambda \cdot W_Q$

erwartete Wartezeit

$$W_Q = \mathrm{E}\{T_Q\} = \frac{L_Q}{\lambda} = \frac{\rho}{\mu \cdot (1 - \rho)}$$

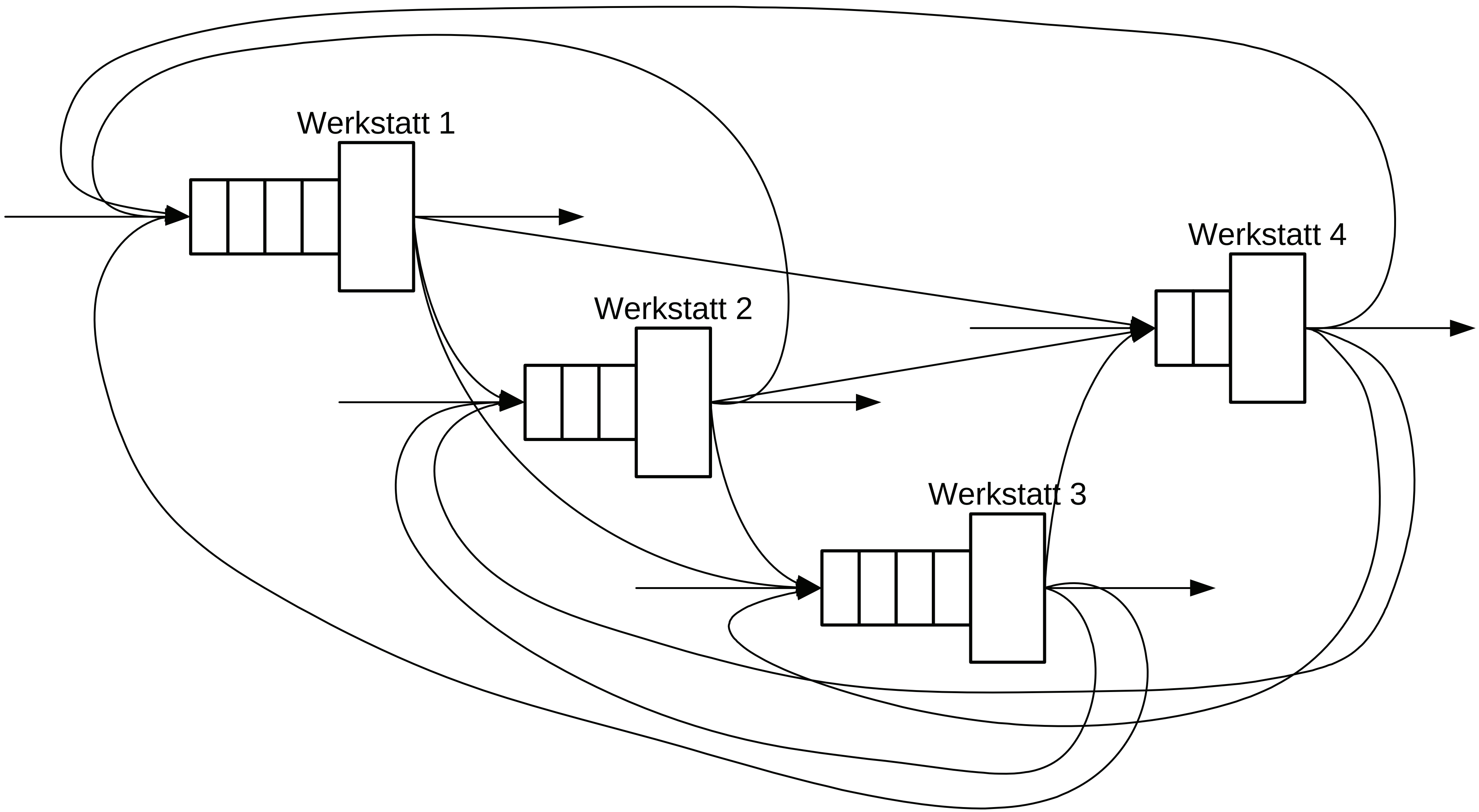
Modell: offenes Warteschlangennetzwerk



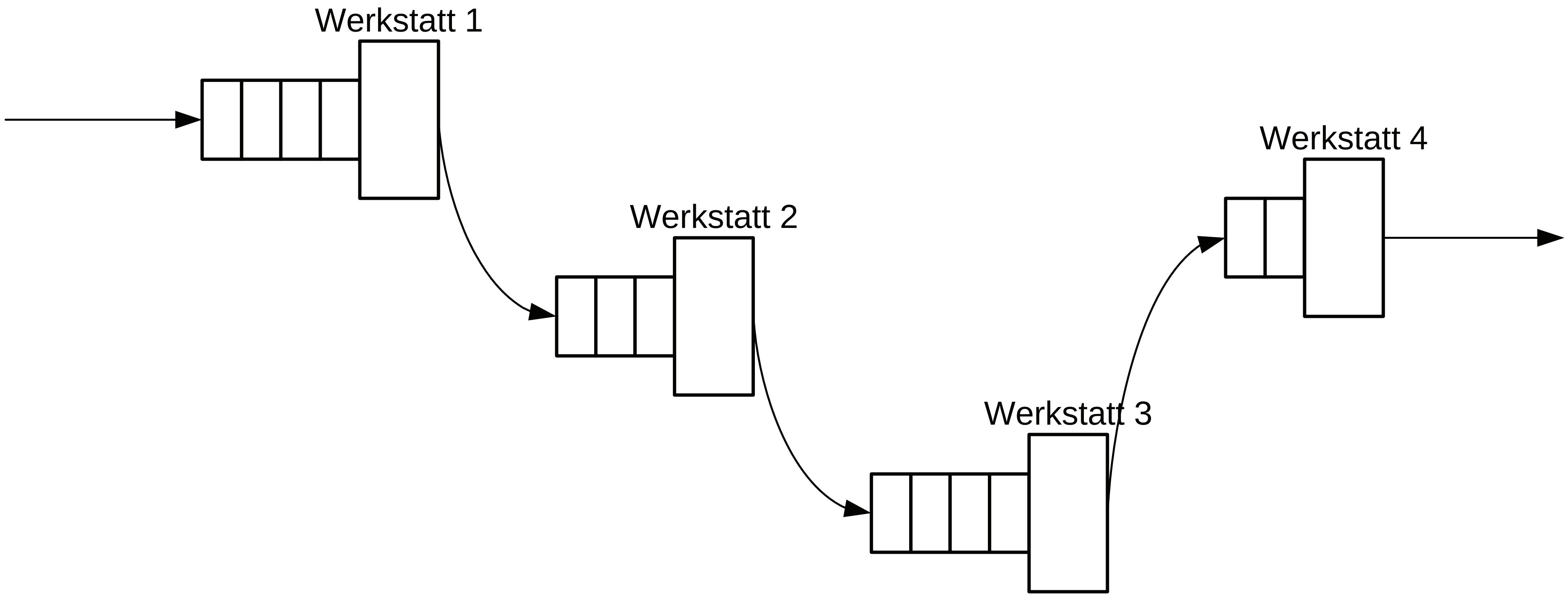
Modell: offenes Warteschlangennetzwerk

- verschiedene Werkstätten
  $\longrightarrow$ insgesamt I einstufige Warteschlangensysteme
- vernetzter Materialfluss
  $\longrightarrow$ Routing-Wahrscheinlichkeiten r_{ij} $\qquad (i, j = 0, 1, \ldots, I, I+1)$
- i. d. R. unbeschränkte Lagerkapazität
  $\longrightarrow$ ausreichend großer Warteraum, unbegrenzte Aufnahmekapazität
- mehrere Maschinen gleicher Funktion innerhalb einer Werkstatt
  $\longrightarrow$ insgesamt c_i parallele Server $\qquad (i = 1, \ldots, I)$
- dynamische Auftragsankünfte
  $\longrightarrow$ Ankunftsrate λ
- produktspezifische Bearbeitungszeiten
  $\longrightarrow$ stochastische Bedienzeit mit Bedienrate μ_i $\qquad (i = 1, \ldots, I)$

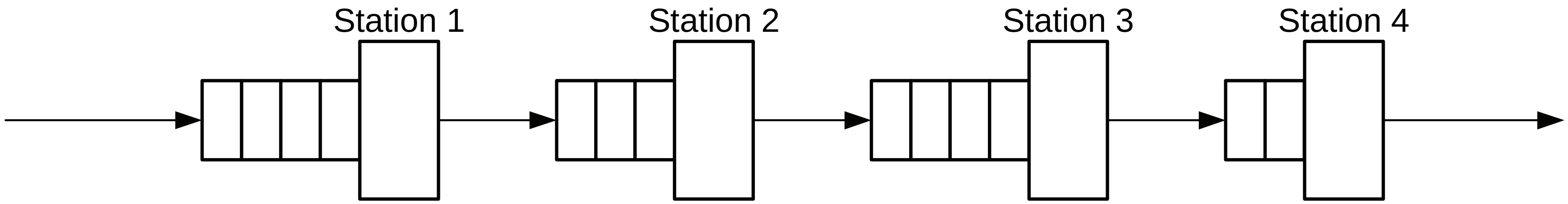
vernetzter Materialfluss



einheitlicher Materialfluss



einheitlicher Materialfluss



Kapazitätsplanung bei Fließproduktion

Planungsprobleme:

- **Leistungsabstimmung**
  - Arbeitsanalyse hinsichtlich
    - Arbeitselemente (elementare Arbeitsgänge)
    - Elementzeit (Arbeitsgangdauer)
    - Produktmix (Varianten des Grundprodukts)
    - Vorranggraph (technologisch bedingte Reihenfolgerestriktionen)

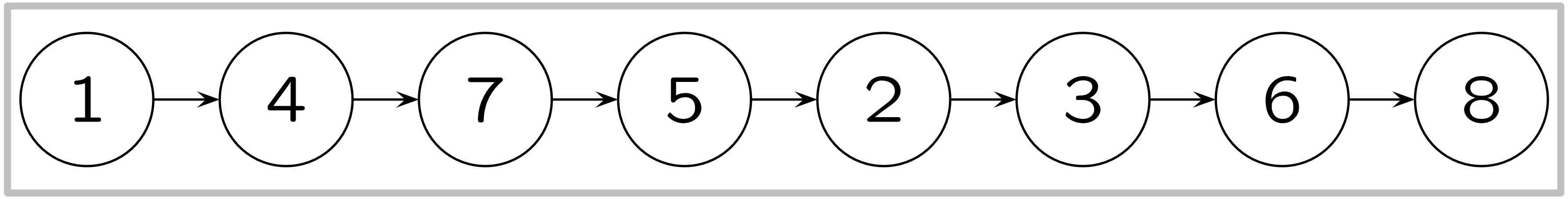
Beispiel **Arbeitselemente**

Arbeitselement Nr. i	1	2	3	4	5	6	7	8
Elementzeit t_i [Zeiteinheiten]	3	1	2	5	4	4	7	1

Beispiel Arbeitselemente

Arbeitselement Nr. i	1	2	3	4	5	6	7	8
Elementzeit t_i [Zeiteinheiten]	3	1	2	5	4	4	7	1

Vorranggraph (Reihenfolgerestriktionen)

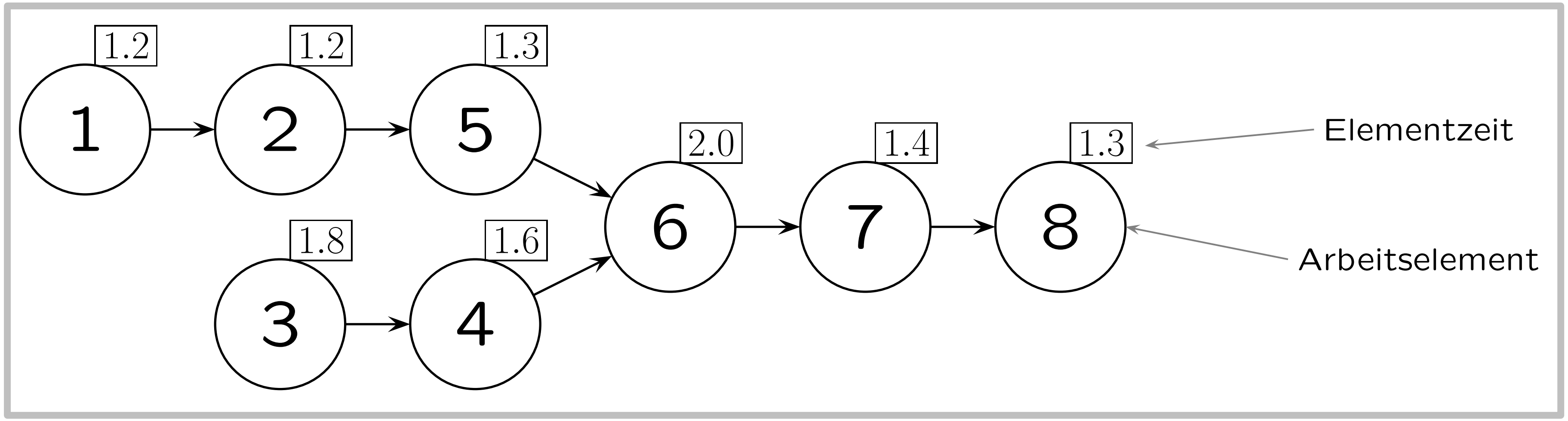


(Beispiel aus Günther/Tempelmeier (2016))

Beispiel Arbeitselemente

Arbeitselement Nr. i	1	2	3	4	5	6	7	8
Elementzeit t_i [Zeiteinheiten]	1.2	1.2	1.8	1.6	1.3	2.0	1.4	1.3

Vorranggraph (Reihenfolgerestriktionen)



(Beispiel aus Günther/Tempelmeier (2016))

Planungsprobleme:

- **Leistungsabstimmung**
  - Arbeitsanalyse hinsichtlich
    - Arbeitselemente (elementare Arbeitsgänge)
    - Elementzeit (Arbeitsgangdauer)
    - Produktmix (Varianten des Grundprodukts)
    - Vorranggraph (technologisch bedingte Reihenfolgerestriktionen)
  - Entscheidungsproblem
    - Minimierung der Anzahl benötigter Bearbeitungsstationen
    - Aufbau der einzelnen Bearbeitungsstationen: Zuordnung der Arbeitselemente zu den Stationen („Arbeitsinhalt“)
    - Restriktionen:
      - vorgegebene Produktionsrate bzw. Taktzeit
      - Unteilbarkeit der Arbeitselemente
      - z. T. technologisch zwingende Bearbeitungsreihenfolge

[Zunächst unterstellen wir deterministische Bedingungen:]

- keine Maschinenausfälle
- keine schwankenden Bearbeitungszeiten
- keine variantenabhängigen Elementzeiten
- synchroner Materialfluss

= deterministische Elementzeiten

= 100 %ig zuverlässige Transferstraßen

$\Longrightarrow$ „Klassische Fließbandabstimmung“

Das klassische Fließbandabstimmungsproblem (Simple Assembly-Line Balancing Problem)

Ein Optimierungsmodell zur klassischen Fließbandabstimmung

Modell SALBP

Was muss festgelegt werden — Entscheidungsvariablen:

$y_m \in \{0;1\}$ ... Wieviel Stationen werden benötigt ?

$$y_m = \begin{cases} 1 & \text{, wenn die } m\text{te Station benötigt wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$x_{im} \in \{0;1\}$ ... Welche Arbeitselemente werden an den einzelnen Stationen ausgeführt ?

$$x_{im} = \begin{cases} 1 & \text{, wenn Arbeitselement } i \text{ der Station } m \text{ zugeordnet wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Modell SALBP

Was ist gegeben — Indexmengen:

I ... Anzahl Arbeitselemente

M ... maximale Anzahl Stationen

$\mathcal{N}_i$ ... Menge der direkten Nachfolger des Arbeitselements i

Was ist gegeben — Daten:

C ... Taktzeit

t_i ... Elementzeit (Arbeitsgangdauer) des Arbeitselements i

Modell SALBP

Minimiere die Anzahl benötigter Stationen: $Z = \sum_{m=1}^{M} y_m$

Modell SALBP

Minimiere die Anzahl benötigter Stationen: $Z = \sum_{m=1}^{M} y_m$

unter Berücksichtigung von

Zuordnungsrestriktionen

Vollständige und eindeutige Zuordnung der Arbeitselemente $i = 1, 2, \ldots, I$:

$$\sum_{m=1}^{M} x_{im} = 1$$

Modell SALBP

Minimiere die Anzahl benötigter Stationen: $Z = \sum_{m=1}^{M} y_m$

unter Berücksichtigung von

Zuordnungsrestriktionen
Vollständige und eindeutige Zuordnung der Arbeitselemente $i = 1, 2, \ldots, I$:

$$\sum_{m=1}^{M} x_{im} = 1$$

Taktzeitrestriktionen: Obergrenze an allen Stationen $m = 1, 2, \ldots, M$:

$$\sum_{i=1}^{I} t_i \cdot x_{im} \leq C \cdot y_m$$

Modell SALBP

Minimiere die Anzahl benötigter Stationen: $Z = \sum_{m=1}^{M} y_m$

unter Berücksichtigung von

Zuordnungsrestriktionen
Vollständige und eindeutige Zuordnung der Arbeitselemente $i = 1, 2, \ldots, I$:

$$\sum_{m=1}^{M} x_{im} = 1$$

Taktzeitrestriktionen: Obergrenze an allen Stationen $m = 1, 2, \ldots, M$:

$$\sum_{i=1}^{I} t_i \cdot x_{im} \leq C \cdot y_m$$

Reihenfolgerestriktionen in bezug die Arbeitselemente $i = 1, 2, \ldots, I - 1$:

$$\sum_{m=1}^{M} m \cdot x_{im} \leq \sum_{m=1}^{M} m \cdot x_{jm} \quad \text{(jeweils für die Nachfolgearbeitsgänge } j \in \mathcal{N}_i\text{)}$$

Äquivalente Zielsetzungen:

- Minimiere die **Anzahl Stationen**:

$$Z$$

- Minimiere die **Durchlaufzeit** eines Werkstücks:

$$Z \cdot C$$

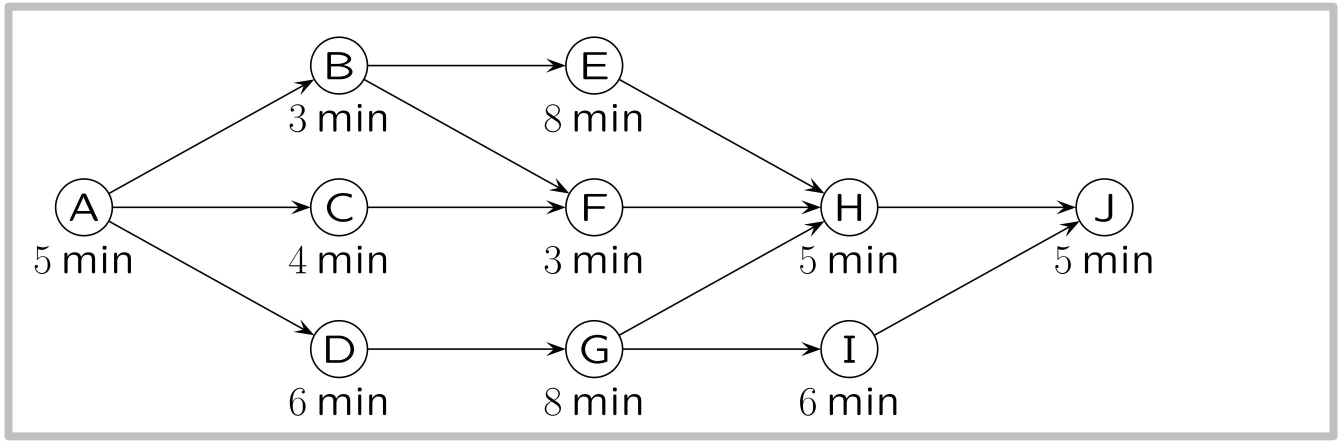
- Minimiere die Summe der **Leerzeiten**:

$$\sum_{m=1}^{Z} \left(C - \sum_{i=1}^{I} t_i \cdot x_{im} \right) = Z \cdot C - \sum_{i=1}^{I} t_i$$

- Maximiere die **Auslastung** (den Bandwirkungsgrad):

$$1 - \frac{Z \cdot C - \sum_{i=1}^{I} t_i}{Z \cdot C} = \frac{\sum_{i=1}^{I} t_i}{Z \cdot C}$$

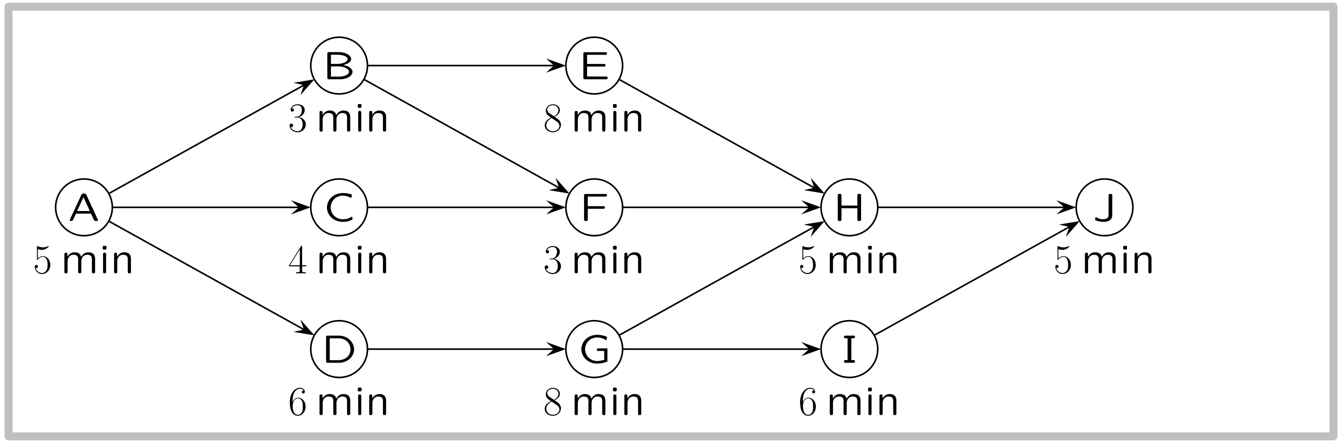
Beispiel Klassische Fließbandabstimmung



vorgegebene Produktionsrate

$X = 42$ Stück pro Schicht, d. h. 42 Stück in $T = 462$ [Minuten]

Beispiel **Klassische Fließbandabstimmung**



vorgegebene Produktionsrate

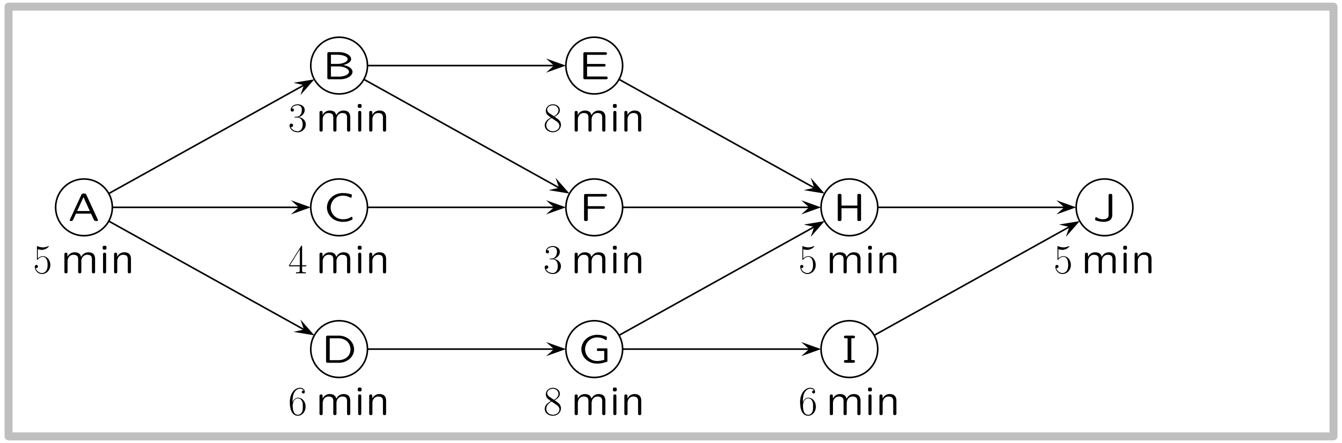
$X = 42$ Stück pro Schicht, d. h. 42 Stück in $T = 462$ [Minuten]

maximale (größtzulässige) Taktzeit

(= Kehrwert der vorgegebenen Produktionsrate)

$$C = \frac{T}{X} = \frac{462\,[\text{Minuten}]}{42\,[\text{Stück}]} = 11 \text{ Minuten pro Stück}$$

Beispiel Klassische Fließbandabstimmung



vorgegebene Produktionsrate

$X = 42$ Stück pro Schicht, d. h. 42 Stück in $T = 462$ [Minuten]

maximale (größtzulässige) Taktzeit

(= Kehrwert der vorgegebenen Produktionsrate)

$$C = \frac{T}{X} = \frac{462\,[\text{Minuten}]}{42\,[\text{Stück}]} = 11 \text{ Minuten pro Stück}$$

Mindestanzahl (theoretisch minimale Anzahl) an Stationen

$$M_{\min} = \frac{\sum \text{Elementzeiten}}{C} = \frac{53}{11} = 4.8\bar{1} \implies \text{aufgerundet: } M_{\min} = \lceil 4.8\bar{1} \rceil = 5$$

Heuristische Lösungsverfahren

Bilde sukzessive die Stationen durch Zuordnung möglichst vieler Arbeitselemente unter Beachtung der

- Reihenfolgerestriktionen,
- Taktzeitrestriktion !

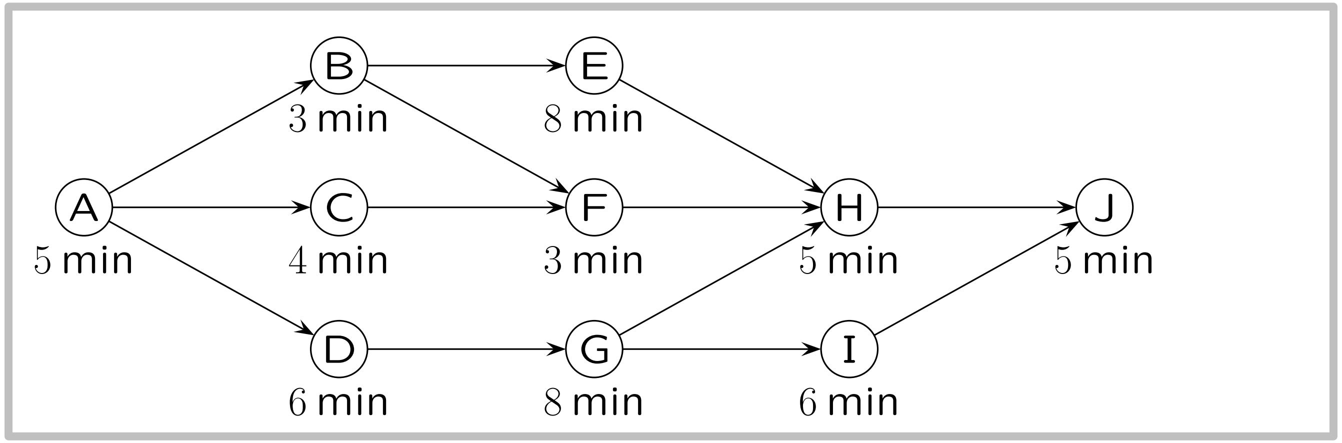
Bilde sukzessive die Stationen durch Zuordnung möglichst vieler Arbeitselemente unter Beachtung der

- Reihenfolgerestriktionen,
- Taktzeitrestriktion !

Wähle aus mehreren möglichen Arbeitselementen gemäß einem **Prioritätsregelverfahren** z. B. dasjenige mit

- der größten Anzahl Nachfolger,
- der längsten Elementzeit,
- der kürzesten Elementzeit,
- dem höchsten Positionswert !
  (= Summe der Elementzeit mit den Elementzeiten der Nachfolger)

Beispiel: Klassische Fließbandabstimmung



vorgegebene Produktionsrate

$X = 42$ Stück pro Schicht, d. h. 42 Stück in $T = 462\,[\text{Minuten}]$

maximale (größtzulässige) Taktzeit

(= Kehrwert der vorgegebenen Produktionsrate)

$$C = \frac{T}{X} = \frac{462\,[\text{Minuten}]}{42\,[\text{Stück}]} = 11 \text{ Minuten pro Stück}$$

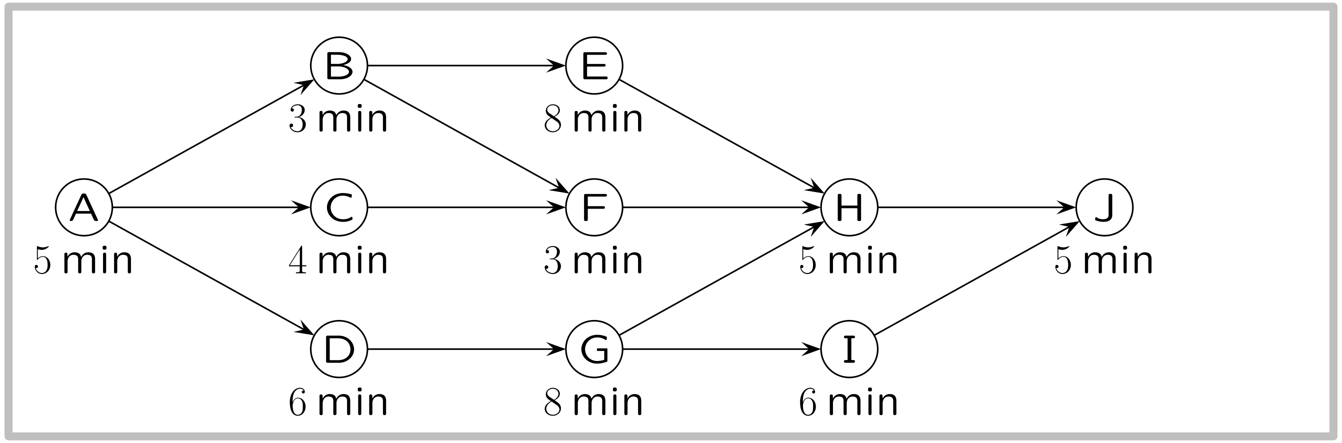
Mindestanzahl (theoretisch minimale Anzahl) an Stationen

$$M_{\min} = \frac{\sum \text{Elementzeiten}}{C} = \frac{53}{11} = 4.8\bar{1} \implies \text{aufgerundet: } M_{\min} = \lceil 4.8\bar{1} \rceil = 5$$

Beispiel **10 Arbeitselemente, Taktzeit 11 Minuten**

Station	Arbeitselemente einplanbar nach Reihenfolge	Arbeitselemente einplanbar nach Taktzeit	Arbeitselemente ausgewählt	Elementzeit [min]	Stationszeit [min]	Restzeit [min]
I	A	A	A	5	5	6
	B, C, D	B, C, D	B mehr Nachfolger als C, ansonsten willkürlich	3	8	3
II	C, D, E	C, D, E	D hat die meisten Nachfolger	6	6	5
	C, E, G	C nur C passt noch	C	4	10	1
III	E, F, G	E, F, G	G hat die meisten Nachfolger	8	8	3
	E, F, I	F nur F passt noch	F	3	11	0
IV	E, I	E, I	E mehr Nachfolger als I	8	8	3
V	H, I	H, I	H willkürlich	5	5	6
	I	I	I	6	11	0
VI	J	J	J	5	5	6

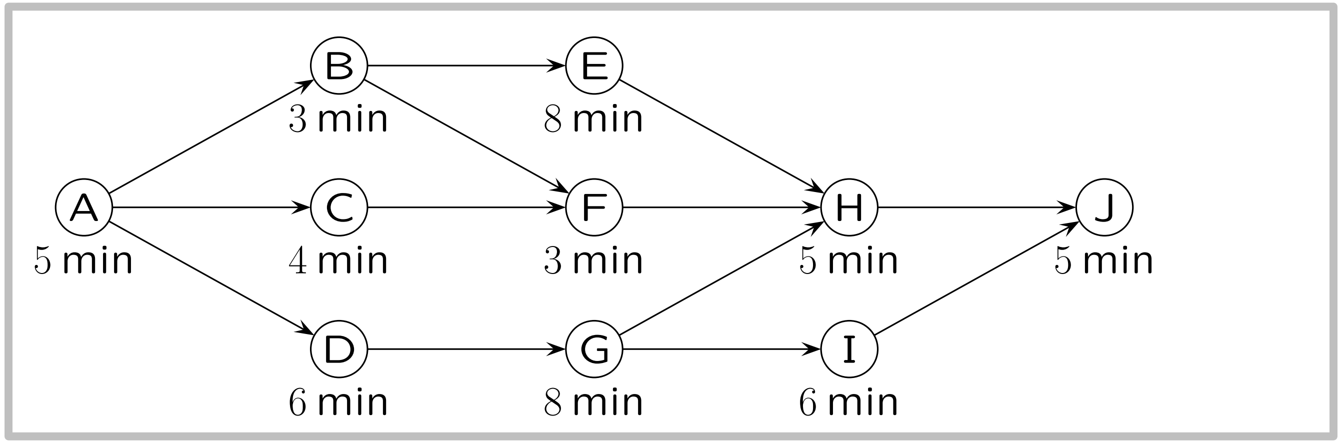
Beispiel **Klassische Fließbandabstimmung**



Bandwirkungsgrad

$$U = 1 - \frac{\sum \text{Leerzeiten}}{\text{Gesamtdurchlaufzeit}}$$

Beispiel Klassische Fließbandabstimmung



Bandwirkungsgrad

$$U = 1 - \frac{\sum \text{Leerzeiten}}{\text{Gesamtdurchlaufzeit}} = 1 - \frac{3+1+0+3+0+6}{6 \cdot 11} = 80.\overline{30}\,\%$$

Stochastisch schwankende Bearbeitungszeiten führen zu zufälligen Wartezeiten vor den Stationen.

Puffer sind Warteräume/Lager für Werkstücke zwischen zwei Stationen.

Leistungsmindernde Effekte bei beschränkten Puffern:

- Starving: Eine Station kann nicht mit der nächsten Bearbeitung beginnen, weil der davorliegende Puffer leer ist.
- Blocking: Eine Station kann nicht mit der nächsten Bearbeitung beginnen, weil der nachfolgende Puffer voll ist und fertige Werkstücke nicht weitertransportiert werden können.

Stochastisch schwankende Bearbeitungszeiten führen zu zufälligen Wartezeiten vor den Stationen.

Puffer sind Warteräume/Lager für Werkstücke zwischen zwei Stationen.

Leistungsmindernde Effekte bei beschränkten Puffern:

- Starving: Eine Station kann nicht mit der nächsten Bearbeitung beginnen, weil der davorliegende Puffer leer ist.
- Blocking: Eine Station kann nicht mit der nächsten Bearbeitung beginnen, weil der nachfolgende Puffer voll ist und fertige Werkstücke nicht weitertransportiert werden können.

Effizienzüberlegungen:

- Das Ausmaß von Blocking und Starving verkleinert sich mit der Puffergröße. ($\Rightarrow$ höhere Produktionsrate)
- Pufferbestände verursachen Lagerkosten.
- Technische Lösungen für Puffereinrichtungen erfordern Investitionsaufwand.

Planungsprobleme:

- **Leistungsabstimmung**
  - Minimierung der Anzahl benötigter Bearbeitungsstationen
  - Aufbau der einzelnen Bearbeitungsstationen: Zuordnung der Arbeitselemente zu den Stationen („Arbeitsinhalt“)
  - Restriktionen:
    - vorgegebene Produktionsrate bzw. Taktzeit
    - Unteilbarkeit der Arbeitselemente
    - z. T. technologisch zwingende Bearbeitungsreihenfolge

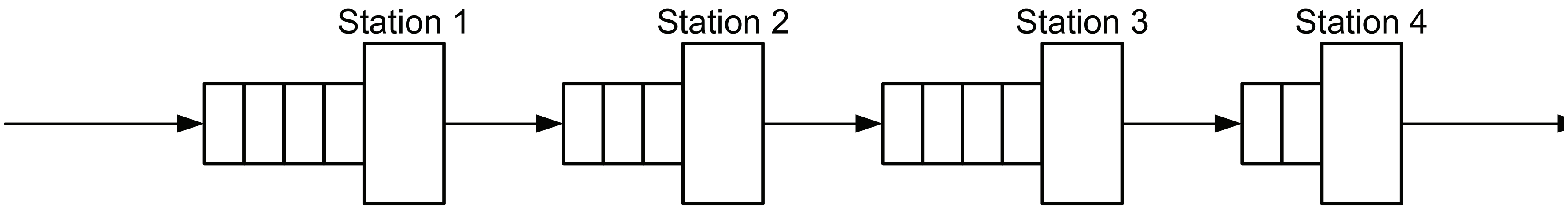
Planungsprobleme:

- **Leistungsabstimmung**
  - Minimierung der Anzahl benötigter Bearbeitungsstationen
  - Aufbau der einzelnen Bearbeitungsstationen:
    Zuordnung der Arbeitselemente zu den Stationen („Arbeitsinhalt“)
  - Restriktionen:
    - vorgegebene Produktionsrate bzw. Taktzeit
    - Unteilbarkeit der Arbeitselemente
    - z. T. technologisch zwingende Bearbeitungsreihenfolge
- **Pufferallokation**
  - Verteilung einer minimalen Anzahl Pufferplätze zwischen die Stationen, so dass die angestrebte Systemleistung (Produktionsrate) erreicht wird

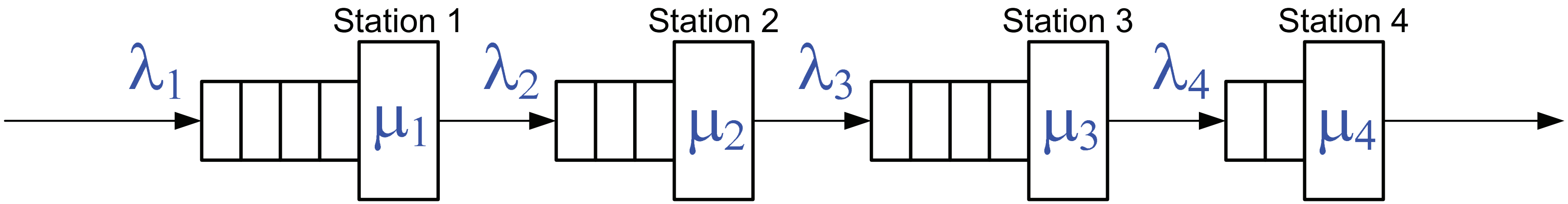
Planungsprobleme:

- **Leistungsabstimmung**
  - Minimierung der Anzahl benötigter Bearbeitungsstationen
  - Aufbau der einzelnen Bearbeitungsstationen: Zuordnung der Arbeitselemente zu den Stationen („Arbeitsinhalt“)
  - Restriktionen:
    - vorgegebene Produktionsrate bzw. Taktzeit
    - Unteilbarkeit der Arbeitselemente
    - z. T. technologisch zwingende Bearbeitungsreihenfolge
- **Pufferallokation**
  - Verteilung einer minimalen Anzahl Pufferplätze zwischen die Stationen, so dass die angestrebte Systemleistung (Produktionsrate) erreicht wird
- **Leistungsanalyse**

Leistungsanalyse bei stochastischen Bearbeitungszeiten



Betrachtung der Stationen als eine Reihe von Warteschlangensystemen



Betrachtung der Stationen als eine Reihe von Warteschlangensystemen:

- μ_m ... Bearbeitungsrate der Station m,
  b_m ... mittlere Bearbeitungszeit eines Werkstücks an der Station m
  $\Longrightarrow \mu_m = \frac{1}{b_m}$
- λ_m ... Ankunftsrate von Werkstücken an der Station m
- unbeschränkte Puffer,
  d. h. Outputrate an Station m = $\min\{\lambda_m, \mu_m\} = \lambda_{m+1}$
- $\lambda_1 = \lambda$ ... Ankunftsrate von Werkstücken aus dem Lager für Vorprodukte
- Produktionsrate

$$X = \min\{\lambda, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_M\}$$

[Spezialfall:]

- exponentialverteilte Zwischenankunftszeiten (Poisson-Ankunftsprozess)
- exponentialverteilte Bearbeitungszeiten, d. h. Stationszeiten

Auslastung der Station m: $(m = 1, 2, \ldots, M)$

$$\rho_m = \frac{\lambda_m}{\mu_m} = \lambda_m \cdot b_m$$

[Spezialfall:]

- exponentialverteilte Zwischenankunftszeiten (Poisson-Ankunftsprozess)
- exponentialverteilte Bearbeitungszeiten, d. h. Stationszeiten

Auslastung der Station m: $(m = 1, 2, \ldots, M)$

$$\rho_m = \frac{\lambda_m}{\mu_m} = \lambda_m \cdot b_m$$

Zustandswahrscheinlichkeiten für die Station m: $(m = 1, 2, \ldots, M)$

$$P_{n_m} = (1 - \rho_m) \cdot \rho_m^{n_m} \qquad (n_m = 0, 1, 2, \ldots)$$

[Spezialfall:]

- exponentialverteilte Zwischenankunftszeiten (Poisson-Ankunftsprozess)
- exponentialverteilte Bearbeitungszeiten, d. h. Stationszeiten

Auslastung der Station m: $(m = 1, 2, \ldots, M)$

$$\rho_m = \frac{\lambda_m}{\mu_m} = \lambda_m \cdot b_m$$

Zustandswahrscheinlichkeiten für die Station m: $(m = 1, 2, \ldots, M)$

$$P_{n_m} = (1 - \rho_m) \cdot \rho_m^{n_m} \qquad (n_m = 0, 1, 2, \ldots)$$

mittlerer Bestand *an* der Station m: $(m = 1, 2, \ldots, M)$

$$L_m = \frac{\rho_m}{1 - \rho_m}$$

[Spezialfall:]

- exponentialverteilte Zwischenankunftszeiten (Poisson-Ankunftsprozess)
- exponentialverteilte Bearbeitungszeiten, d. h. Stationszeiten

Auslastung der Station m: $(m = 1, 2, \ldots, M)$

$$\rho_m = \frac{\lambda_m}{\mu_m} = \lambda_m \cdot b_m$$

Zustandswahrscheinlichkeiten für die Station m: $(m = 1, 2, \ldots, M)$

$$P_{n_m} = (1 - \rho_m) \cdot \rho_m^{n_m} \qquad (n_m = 0, 1, 2, \ldots)$$

mittlerer Bestand *an* der Station m: $(m = 1, 2, \ldots, M)$

$$L_m = \frac{\rho_m}{1 - \rho_m}$$

mittlere Warteschlangenlänge *vor* der Station m: $(m = 1, 2, \ldots, M)$

$$L_m^{\mathrm{Q}} = \frac{\rho_m^2}{1 - \rho_m}$$

[Spezialfall:]

- exponentialverteilte Zwischenankunftszeiten (Poisson-Ankunftsprozess)
- exponentialverteilte Bearbeitungszeiten, d. h. Stationszeiten

Auslastung der Station m: $(m = 1, 2, \ldots, M)$

$$\rho_m = \frac{\lambda_m}{\mu_m} = \lambda_m \cdot b_m$$

Zustandswahrscheinlichkeiten für die Station m: $(m = 1, 2, \ldots, M)$

$$P_{n_m} = (1 - \rho_m) \cdot \rho_m^{n_m} \qquad (n_m = 0, 1, 2, \ldots)$$

mittlerer Bestand *an* der Station m: $(m = 1, 2, \ldots, M)$

$$L_m = \frac{\rho_m}{1 - \rho_m}$$

mittlere Durchlaufzeit an der Station m: $(m = 1, 2, \ldots, M)$

$$W_m = \frac{b_m}{1 - \rho_m}$$

Beispiel Leistungsanalyse bei M/M/1-Subsystemen

- Reihenproduktion mit insgesamt $M = 5$ Stationen
- Ankunftsrate vor der ersten Station: $\lambda = 0.08$ Stück pro Minute
- mittlere Bearbeitungszeit an allen Stationen: $b_m = 10$ Minuten

Beispiel Leistungsanalyse bei M/M/1-Subsystemen

- Reihenproduktion mit insgesamt $M = 5$ Stationen
- Ankunftsrate vor der ersten Station: $\lambda = 0.08$ Stück pro Minute
- mittlere Bearbeitungszeit an allen Stationen: $b_m = 10$ Minuten

Ankunftsrate an Station m:

$$\lambda_1 = \lambda = 0.08, \; \lambda_m = \min\{\lambda_{m-1}, \mu_{m-1}\} = 0.08 \qquad (m = 2, \ldots, 5)$$

Beispiel Leistungsanalyse bei M/M/1-Subsystemen

- Reihenproduktion mit insgesamt $M = 5$ Stationen
- Ankunftsrate vor der ersten Station: $\lambda = 0.08$ Stück pro Minute
- mittlere Bearbeitungszeit an allen Stationen: $b_m = 10$ Minuten

Ankunftsrate an Station m:

$$\lambda_1 = \lambda = 0.08,\ \lambda_m = \min\{\lambda_{m-1}, \mu_{m-1}\} = 0.08 \qquad (m = 2, \ldots, 5)$$

Stationsauslastung $U_m = \lambda_m \cdot b_m = 0.08 \cdot 10 = 0.8$

Beispiel **Leistungsanalyse bei M/M/1-Subsystemen**

- Reihenproduktion mit insgesamt $M = 5$ Stationen
- Ankunftsrate vor der ersten Station: $\lambda = 0.08$ Stück pro Minute
- mittlere Bearbeitungszeit an allen Stationen: $b_m = 10$ Minuten

Ankunftsrate an Station m:

$$\lambda_1 = \lambda = 0.08,\ \lambda_m = \min\{\lambda_{m-1}, \mu_{m-1}\} = 0.08 \qquad (m = 2, \ldots, 5)$$

Stationsauslastung $U_m = \lambda_m \cdot b_m = 0.08 \cdot 10 = 0.8$

Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Bestand an den Stationen

$$P_0 = 0.2,\ P_1 = 0.16,\ P_2 = 0.128,\ P_3 = 0.1024,\ P_4 = 0.0819, \ldots, P_{18} = 0.0036, \ldots$$

Beispiel Leistungsanalyse bei M/M/1-Subsystemen

- Reihenproduktion mit insgesamt $M = 5$ Stationen
- Ankunftsrate vor der ersten Station: $\lambda = 0.08$ Stück pro Minute
- mittlere Bearbeitungszeit an allen Stationen: $b_m = 10$ Minuten

Ankunftsrate an Station m:

$$\lambda_1 = \lambda = 0.08,\ \lambda_m = \min\{\lambda_{m-1}, \mu_{m-1}\} = 0.08 \qquad (m = 2, \ldots, 5)$$

Stationsauslastung $U_m = \lambda_m \cdot b_m = 0.08 \cdot 10 = 0.8$

Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Bestand an den Stationen

$$P_0 = 0.2,\ P_1 = 0.16,\ P_2 = 0.128,\ P_3 = 0.1024,\ P_4 = 0.0819, \ldots, P_{18} = 0.0036, \ldots$$

Bestand $L_m = \dfrac{\rho_m}{1 - \rho_m} = \dfrac{0.8}{0.2} = 4$

Beispiel Leistungsanalyse bei M/M/1-Subsystemen

- Reihenproduktion mit insgesamt $M = 5$ Stationen
- Ankunftsrate vor der ersten Station: $\lambda = 0.08$ Stück pro Minute
- mittlere Bearbeitungszeit an allen Stationen: $b_m = 10$ Minuten

Ankunftsrate an Station m:

$$\lambda_1 = \lambda = 0.08,\ \lambda_m = \min\{\lambda_{m-1}, \mu_{m-1}\} = 0.08 \qquad (m = 2, \ldots, 5)$$

Stationsauslastung $U_m = \lambda_m \cdot b_m = 0.08 \cdot 10 = 0.8$

Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Bestand an den Stationen

$$P_0 = 0.2,\ P_1 = 0.16,\ P_2 = 0.128,\ P_3 = 0.1024,\ P_4 = 0.0819, \ldots, P_{18} = 0.0036, \ldots$$

Bestand $L_m = \dfrac{\rho_m}{1-\rho_m} = \dfrac{0.8}{0.2} = 4,\ L = \sum_{i=1}^{5} L_m = 20$

Beispiel **Leistungsanalyse bei M/M/1-Subsystemen**

- Reihenproduktion mit insgesamt $M = 5$ Stationen
- Ankunftsrate vor der ersten Station: $\lambda = 0.08$ Stück pro Minute
- mittlere Bearbeitungszeit an allen Stationen: $b_m = 10$ Minuten

Ankunftsrate an Station m:

$$\lambda_1 = \lambda = 0.08,\ \lambda_m = \min\{\lambda_{m-1}, \mu_{m-1}\} = 0.08 \qquad (m = 2, \ldots, 5)$$

Stationsauslastung $U_m = \lambda_m \cdot b_m = 0.08 \cdot 10 = 0.8$

Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Bestand an den Stationen

$$P_0 = 0.2,\ P_1 = 0.16,\ P_2 = 0.128,\ P_3 = 0.1024,\ P_4 = 0.0819, \ldots, P_{18} = 0.0036, \ldots$$

Bestand $L_m = \dfrac{\rho_m}{1-\rho_m} = \dfrac{0.8}{0.2} = 4,\ L = \displaystyle\sum_{i=1}^{5} L_m = 20$

Durchlaufzeit $W_m = \dfrac{b_m}{1-\rho_m} = \dfrac{10}{0.2} = 50$

Beispiel **Leistungsanalyse bei M/M/1-Subsystemen**

- Reihenproduktion mit insgesamt $M = 5$ Stationen
- Ankunftsrate vor der ersten Station: $\lambda = 0.08$ Stück pro Minute
- mittlere Bearbeitungszeit an allen Stationen: $b_m = 10$ Minuten

Ankunftsrate an Station m:

$$\lambda_1 = \lambda = 0.08,\ \lambda_m = \min\{\lambda_{m-1}, \mu_{m-1}\} = 0.08 \qquad (m = 2, \ldots, 5)$$

Stationsauslastung $U_m = \lambda_m \cdot b_m = 0.08 \cdot 10 = 0.8$

Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Bestand an den Stationen

$$P_0 = 0.2,\ P_1 = 0.16,\ P_2 = 0.128,\ P_3 = 0.1024,\ P_4 = 0.0819, \ldots, P_{18} = 0.0036, \ldots$$

Bestand $L_m = \frac{\rho_m}{1-\rho_m} = \frac{0.8}{0.2} = 4,\ L = \sum_{i=1}^{5} L_m = 20$

Durchlaufzeit $W_m = \frac{b_m}{1-\rho_m} = \frac{10}{0.2} = 50,\ W = \sum_{i=1}^{5} W_m = 250$

Beispiel Leistungsanalyse bei M/M/1-Subsystemen

- Reihenproduktion mit insgesamt $M = 5$ Stationen
- Ankunftsrate vor der ersten Station: $\lambda = 0.08$ Stück pro Minute
- mittlere Bearbeitungszeit an allen Stationen: $b_m = 10$ Minuten

Ankunftsrate an Station m:

$$\lambda_1 = \lambda = 0.08,\ \lambda_m = \min\{\lambda_{m-1}, \mu_{m-1}\} = 0.08 \qquad (m = 2, \dots, 5)$$

Stationsauslastung $U_m = \lambda_m \cdot b_m = 0.08 \cdot 10 = 0.8$

Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Bestand an den Stationen

$$P_0 = 0.2,\ P_1 = 0.16,\ P_2 = 0.128,\ P_3 = 0.1024,\ P_4 = 0.0819, \dots, P_{18} = 0.0036, \dots$$

Bestand $L_m = \dfrac{\rho_m}{1 - \rho_m} = \dfrac{0.8}{0.2} = 4,\ L = \displaystyle\sum_{i=1}^{5} L_m = 20$

Durchlaufzeit $W_m = \dfrac{b_m}{1 - \rho_m} = \dfrac{10}{0.2} = 50,\ W = \displaystyle\sum_{i=1}^{5} W_m = 250$

Produktionsrate $X = \min\{\lambda, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5\} = 0.08$