Bestandsmanagement unter deterministischen Bedingungen („Bestellmengen- bzw. Losgrößenplanung“)

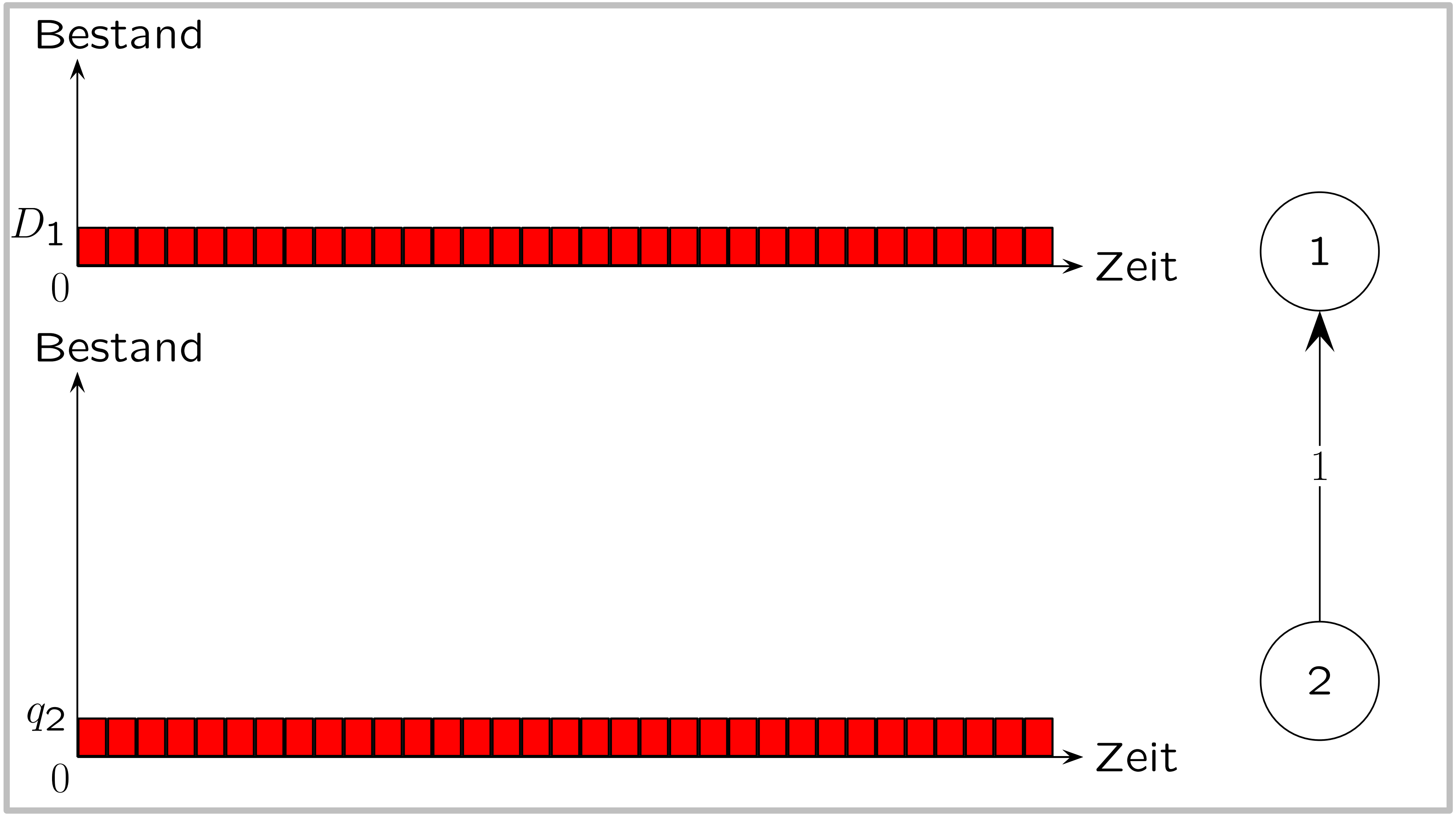
Materialbereitstellungsprinzipien:

- einsatzsynchrone Materialbereitstellung im Bedarfsfall
- Einzelbeschaffung im Bedarfsfall
- Vorratshaltung:
  Zusammenfassung von (Netto-)Bedarfsmengen zu größeren Produktions- bzw. Beschaffungslosen
  - um Rüstvorgänge einzusparen
    - Rüstkosten (direkt zurechenbare Kosten)
    - Rüstzeiten (Opportunitätskosten)
  - unter Inkaufnahme von Lagerkosten durch Vorausproduktion bzw. Vorabbestellung
  - auf Grund knapper Kapazitäten

Charakterisierung von Losgrößenplanungsproblemen

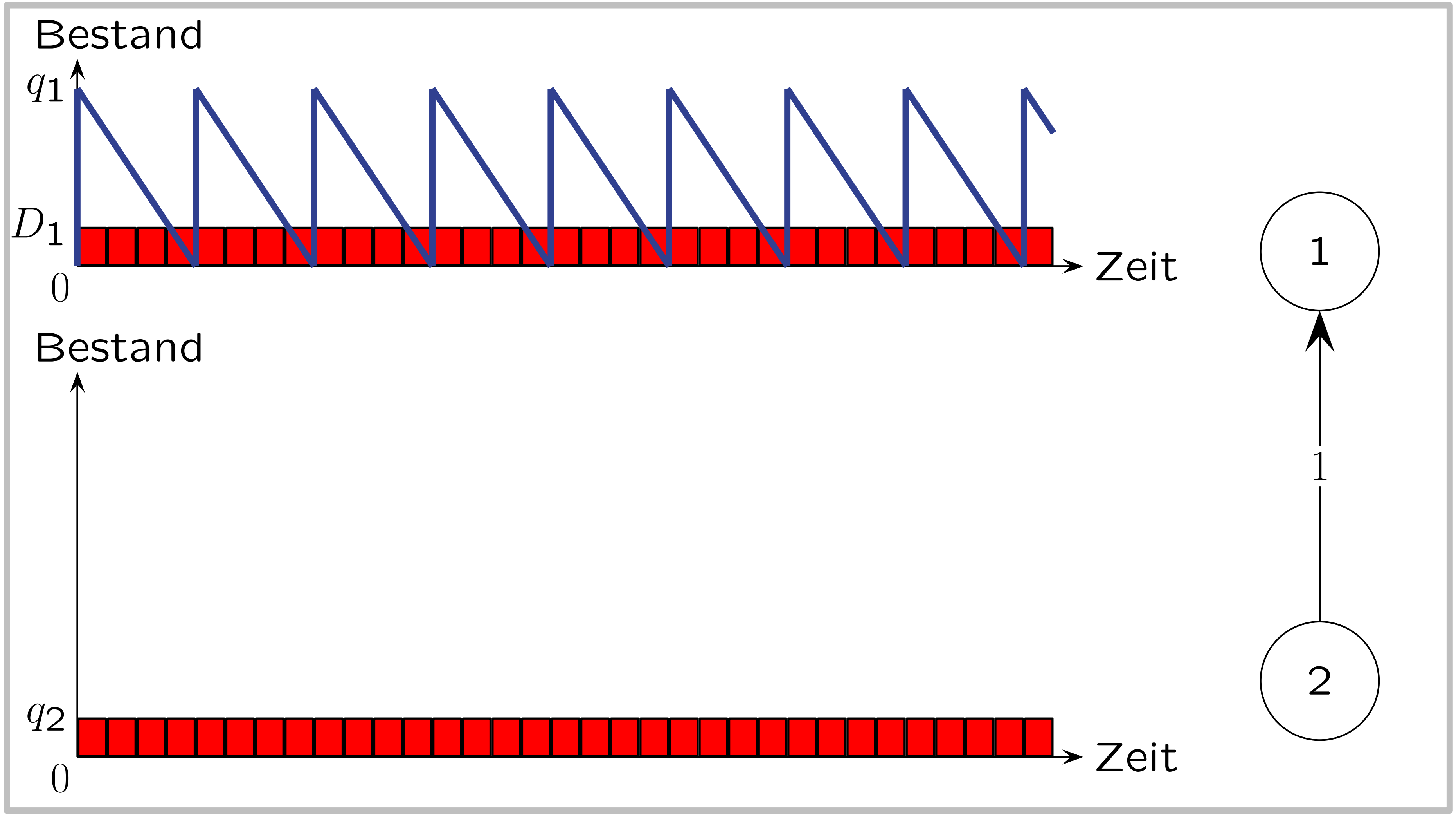
Grad der Abhängigkeit	Niveau der Bedarfsmengen: gleichbleibend	Niveau der Bedarfsmengen: schwankend
unabhängig	statische Losgrößenprobleme mit unabhängigem Bedarf	dynamische Losgrößenprobleme mit unabhängigem Bedarf
abhängig	statische Losgrößenprobleme mit abhängigem Bedarf	dynamische Losgrößenprobleme mit abhängigem Bedarf

Gemeinsame Entwicklung des Lagerbestands zweier durch direkte Input-Output-Beziehungen miteinander verbundener Erzeugnisse:



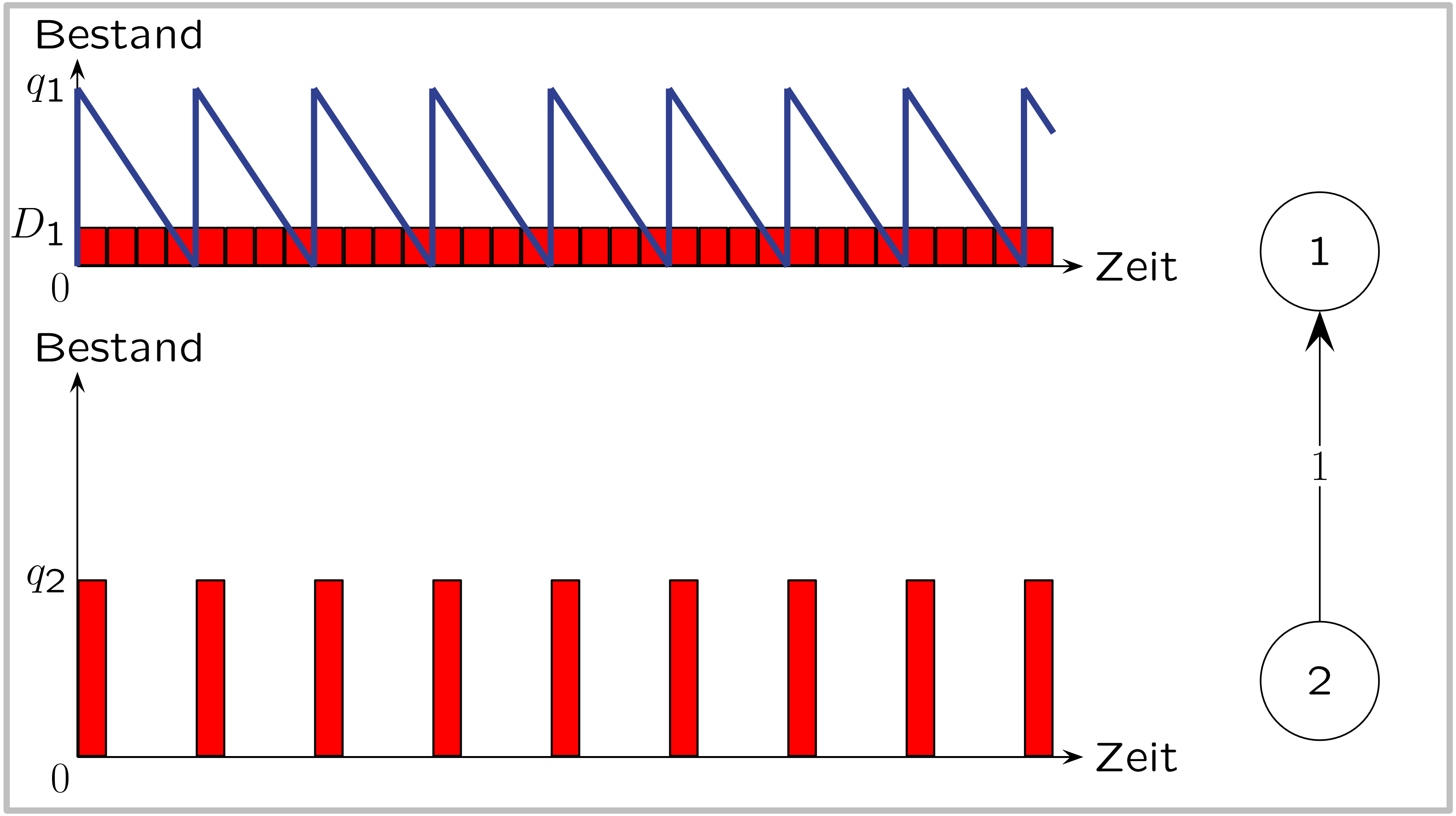
(s. Tempelmeier (2006))

Gemeinsame Entwicklung des Lagerbestands zweier durch direkte Input-Output-Beziehungen miteinander verbundener Erzeugnisse:



(s. Tempelmeier (2006))

Gemeinsame Entwicklung des Lagerbestands zweier durch direkte Input-Output-Beziehungen miteinander verbundener Erzeugnisse:



(s. Tempelmeier (2006))

Dynamische Losgrößenplanung

Das dynamische Einprodukt-Losgrößenproblem

Modell SIULSP

Was muss festgelegt werden:

... Soll für das betrachtete Erzeugnis in Periode t ein Los aufgelegt werden ?

... Wieviel soll ggf. produziert werden ?

... Wieviel Lagerbestand ist damit verbunden ?

Modell SIULSP

Was muss festgelegt werden — Entscheidungsvariable:

$\gamma_t \in \{0, 1\}$ ... Binärvariable zur Kennzeichnung, ob das betrachtete Erzeugnis in Periode t produziert wird

$$\gamma_t = \begin{cases} 1 & \text{, wenn ein Los in Periode } t \text{ aufgelegt wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

q_t ... Produktionsmenge in Periode t

y_t ... Lagerbestand am Ende von Periode t

Modell SIULSP

Was ist gegeben — Daten:

d_t ... Bedarf in Periode t

$y^{(0)}$ ... Anfangslagerbestand

s ... Rüstkostensatz

h ... Lagerkostensatz

p_t ... variable Produktionskosten in Periode t

M ... eine große Zahl, die größer sein muss als die maximal mögliche Losgröße

Modell SIULSP

Minimiere die Summe aus Rüst-, Lager- und variablen Produktionskosten:

$$Z = \sum_{t=1}^{T} (h \cdot y_t + s \cdot \gamma_t + p_t \cdot q_t)$$

u. B. d. R.:

Anfangslagerbestand:

$$y_0 = y^{(0)}$$

Lagerbilanz: Anfangsbestand + Zugänge − Abgänge = Endbestand

$$y_{t-1} + q_t - d_t = y_t \qquad \text{für alle } t = 1, 2, \ldots, T$$

Modell SIULSP

Minimiere die Summe aus Rüst-, Lager- und variablen Produktionskosten:

$$Z = \sum_{t=1}^{T} (h \cdot y_t + s \cdot \gamma_t + p_t \cdot q_t)$$

u. B. d. R.:

Anfangslagerbestand:

$$y_0 = y^{(0)}$$

Lagerbilanz: Anfangsbestand + Zugänge − Endbestand = Abgänge

$$y_{t-1} + q_t - y_t = d_t \qquad \text{für alle } t = 1, 2, \ldots, T$$

Modell SIULSP

Minimiere die Summe aus Rüst-, Lager- und variablen Produktionskosten:

$$Z = \sum_{t=1}^{T} (h \cdot y_t + s \cdot \gamma_t)$$

u. B. d. R.:

Anfangslagerbestand:

$$y_0 = y^{(0)}$$

Bedarf in Periode t:

$$y_{t-1} + q_t - y_t = d_t \qquad \text{für alle } t = 1, 2, \ldots, T$$

Es muss gerüstet werden, wenn $q_t > 0$ ist:

$$q_t - M_t \cdot \gamma_t \leq 0 \qquad \text{für alle } t = 1, 2, \ldots, T$$

Wertebereich:

$$q_t \geq 0; \; y_t \geq 0; \; \gamma_t \in \{0, 1\} \qquad \text{für alle } t = 1, 2, \ldots, T$$

$$M_t \overset{!}{\geq} \sum_{j=t}^{T} d_j =: D_{tT} \qquad (t = 1, 2, \ldots, T)$$

Modell SIULSP

Minimiere die Summe aus Rüst-, Lager- und variablen Produktionskosten:

$$Z = \sum_{t=1}^{T} (h \cdot y_t + s \cdot \gamma_t + p_t \cdot q_t)$$

u. B. d. R.:

Anfangslagerbestand:

$$y_0 = y^{(0)}$$

Bedarf in Periode t:

$$y_{t-1} + q_t - y_t = d_t \qquad \text{für alle } t = 1, 2, \ldots, T$$

Es muss gerüstet werden, wenn $q_t > 0$ ist:

$$q_t - M_t \cdot \gamma_t \leq 0 \qquad \text{für alle } t = 1, 2, \ldots, T$$

Wertebereich:

$$q_t \geq 0;\ y_t \geq 0;\ y_T \geq 0;\ \gamma_t \in \{0, 1\} \qquad \text{für alle } t = 1, 2, \ldots, T$$

Modell SIULSP

Minimiere die Summe aus Rüst-, Lager- und variablen Produktionskosten:

$$Z = \sum_{t=1}^{T} (h \cdot y_t + s \cdot \gamma_t + p_t \cdot q_t)$$

u. B. d. R.:

Anfangslagerbestand:

$$y_0 = y^{(0)}$$

Bedarf in Periode t:

$$y_{t-1} + q_t - y_t = d_t \qquad \text{für alle } t = 1, 2, \ldots, T$$

Es muss gerüstet werden, wenn $q_t > 0$ ist:

$$q_t - D_{tT} \cdot \gamma_t \leq 0 \qquad \text{für alle } t = 1, 2, \ldots, T$$

Wertebereich:

$$q_t \geq 0;\ y_t \geq 0;\ y_T \geq 0;\ \gamma_t \in \{0, 1\} \qquad \text{für alle } t = 1, 2, \ldots, T$$

$$M_t \overset{!}{\geq} \sum_{j=t}^{T} d_j =: D_{tT} \Longrightarrow q_t - D_{tT} \cdot \gamma_t \leq 0 \qquad (t = 1, 2, \ldots, T)$$

$$M_t \overset{!}{\geq} \sum_{j=t}^{T} d_j =: D_{tT} \Longrightarrow q_t - D_{tT} \cdot \gamma_t \leq 0 \qquad (t = 1, 2, \ldots, T)$$

Wagner-Whitin-Eigenschaft (bei unbeschränkten Kapazitäten)

$$q_t \cdot y_{t-1} = 0 \qquad (t = 1, 2, \ldots, T)$$

- Es wird in Periode t nur dann ein neues Los aufgelegt ($q_t > 0$), wenn der Lagerbestand erschöpft ist ($y_{t-1} = 0$).
- Wenn Lagerbestand übernommen wird ($y_{t-1} > 0$), dann ist der Lagerbestand mindestens so groß, dass er den aktuellen Bedarf decken kann ($y_{t-1} \geq d_t$). Die noch bereitzustellende Menge ist dann $q_t = 0$.
- Überflüssige Bestände kann es nicht geben, bei denen man trotz Lagerkosten keine Rüstkosten einspart.

$\Longrightarrow$ Nur ganze Periodenbedarfsmengen werden zu Losen zusammengefasst !

Lösungsverfahren für das dynamische Einprodukt-Losgrößenproblem

Exakte Lösung mit dynamischer Optimierung

Beispiel **SIULSP**

- Rüstkostensatz: $s = 500$ GE pro Rüstvorgang
- Lagerkostensatz: $h = 1$ GE pro ME und Periode
- keine entscheidungsrelevanten variablen Produktionskosten
-

Periode t	1	2	3	4	5	6
Bedarfsmenge d_t	20	80	160	85	120	100

Beispiel **SIULSP**

- Rüstkostensatz: $s = 500$ GE pro Rüstvorgang
- Lagerkostensatz: $h = 1$ GE pro ME und Periode
- keine entscheidungsrelevanten variablen Produktionskosten
-

Periode t	1	2	3	4	5	6
Bedarfsmenge d_t	20	80	160	85	120	100

Kosten $c_{\tau j}$ einer (ökonomisch sinnvollen) Teilpolitik $p_{\tau j}$ (eines Loses), die die Bedarfsmengen d_τ bis d_j abdeckt $(\tau = 1, 2, \ldots, 6,\ j = \tau, \tau + 1, \ldots, 6)$

letzte Bedarfsperiode (j) Bereitstellungsperiode (τ)	1	2	3	4	5	6
1	500	580	900	1155	1635	2135
2	–	500	660	830	1190	1590
3	–	–	500	585	825	1125
4	–	–	–	500	620	820
5	–	–	–	–	500	600
6	–	–	–	–	–	500

Beispiel **SIULSP**

Kosten $c_{\tau j}$ einer (ökonomisch sinnvollen) Teilpolitik $p_{\tau j}$ (eines Loses), die die Bedarfsmengen d_τ bis d_j abdeckt $(\tau = 1, 2, \ldots, 6,\ j = \tau, \tau+1, \ldots, 6)$

letzte Bedarfsperiode (j) Bereitstellungsperiode (τ)	1	2	3	4	5	6
1	500	580	900	1155	1635	2135
2	–	500	660	830	1190	1590
3	–	–	500	585	825	1125
4	–	–	–	500	620	820
5	–	–	–	–	500	600
6	–	–	–	–	–	500

Beispiel SIULSP

Kosten $c_{\tau j}$ einer (ökonomisch sinnvollen) Teilpolitik $p_{\tau j}$ (eines Loses), die die Bedarfsmengen d_τ bis d_j abdeckt $(\tau = 1, 2, \dots, 6,\ j = \tau, \tau+1, \dots, 6)$

letzte Bedarfsperiode (j) / Bereitstellungsperiode (τ)	1	2	3	4	5	6
1	500	580	900	1155	1635	2135
2	–	500	660	830	1190	1590
3	–	–	500	585	825	1125
4	–	–	–	500	620	820
5	–	–	–	–	500	600
6	–	–	–	–	–	500

Kosten für den Planungszeitraum von 6 Perioden:

- $C_6 = C_5 + c_{66}$
- $C_6 = C_4 + c_{56}$
- $C_6 = C_3 + c_{46}$
- $C_6 = C_2 + c_{36}$
- $C_6 = C_1 + c_{26}$
- $C_6 = c_{16}$

Beispiel **SIULSP**

Kosten $c_{\tau j}$ einer (ökonomisch sinnvollen) Teilpolitik $p_{\tau j}$ (eines Loses), die die Bedarfsmengen d_τ bis d_j abdeckt $\quad (\tau = 1, 2, \ldots, 6,\ j = \tau, \tau+1, \ldots, 6)$

letzte Bedarfsperiode (j) / Bereitstellungsperiode (τ)	1	2	3	4	5	6
1	500	580	900	1155	1635	2135
2	–	500	660	830	1190	1590
3	–	–	500	585	825	1125
4	–	–	–	500	620	820
5	–	–	–	–	500	600
6	–	–	–	–	–	500

Kosten für den Planungszeitraum von T Perioden:

$$C_T = C_i + c_{i+1,T} \qquad (i = 1, 2, \ldots, T-1)$$

Minimale Kosten einer Lospolitik für die ersten i Planungsperioden:

$$f_i = \min_{1 \le \tau \le i} \{f_{\tau-1} + c_{\tau i}\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, T)$$

Beispiel **SIULSP**

Kosten $c_{\tau j}$ einer (ökonomisch sinnvollen) Teilpolitik $p_{\tau j}$ (eines Loses), die die Bedarfsmengen d_τ bis d_j abdeckt $(\tau = 1, 2, \ldots, 6,\ j = \tau, \tau+1, \ldots, 6)$

letzte Bedarfsperiode (j) Bereitstellungsperiode (τ)	1	2	3	4	5	6
1	500	580	900	1155	1635	2135
2	–	500	660	830	1190	1590
3	–	–	500	585	825	1125
4	–	–	–	500	620	820
5	–	–	–	–	500	600
6	–	–	–	–	–	500

Minimale Kosten einer Lospolitik bis zur Periode 1:

Beispiel **SIULSP**

Kosten $c_{\tau j}$ einer (ökonomisch sinnvollen) Teilpolitik $p_{\tau j}$ (eines Loses), die die Bedarfsmengen d_τ bis d_j abdeckt $(\tau = 1, 2, \ldots, 6,\ j = \tau, \tau+1, \ldots, 6)$

letzte Bedarfsperiode (j) / Bereitstellungsperiode (τ)	1	2	3	4	5	6
1	500	580	900	1155	1635	2135
2	–	500	660	830	1190	1590
3	–	–	500	585	825	1125
4	–	–	–	500	620	820
5	–	–	–	–	500	600
6	–	–	–	–	–	500

Minimale Kosten einer Lospolitik bis zur Periode 1:

$f_1 = c_{11} = 500$

Beispiel **SIULSP**

Kosten $c_{\tau j}$ einer (ökonomisch sinnvollen) Teilpolitik $p_{\tau j}$ (eines Loses), die die Bedarfsmengen d_τ bis d_j abdeckt $(\tau = 1, 2, \ldots, 6,\ j = \tau, \tau + 1, \ldots, 6)$

letzte Bedarfsperiode (j) Bereitstellungsperiode (τ)	1	2	3	4	5	6
1	500	580	900	1155	1635	2135
2	–	500	660	830	1190	1590
3	–	–	500	585	825	1125
4	–	–	–	500	620	820
5	–	–	–	–	500	600
6	–	–	–	–	–	500

Minimale Kosten einer Lospolitik bis zur Periode 1:

$$f_1 = c_{11} = 500 \implies P_1^{\text{opt}} = (p_{11})$$

Beispiel **SIULSP**

Kosten $c_{\tau j}$ einer (ökonomisch sinnvollen) Teilpolitik $p_{\tau j}$ (eines Loses), die die Bedarfsmengen d_τ bis d_j abdeckt $(\tau = 1, 2, \ldots, 6,\ j = \tau, \tau+1, \ldots, 6)$

letzte Bedarfsperiode (j) Bereitstellungsperiode (τ)	1	2	3	4	5	6
1	500	580	900	1155	1635	2135
2	–	500	660	830	1190	1590
3	–	–	500	585	825	1125
4	–	–	–	500	620	820
5	–	–	–	–	500	600
6	–	–	–	–	–	500

Minimale Kosten einer Lospolitik bis zur Periode 2:

Beispiel **SIULSP**

Kosten $c_{\tau j}$ einer (ökonomisch sinnvollen) Teilpolitik $p_{\tau j}$ (eines Loses), die die Bedarfsmengen d_τ bis d_j abdeckt $(\tau = 1, 2, \ldots, 6,\ j = \tau, \tau + 1, \ldots, 6)$

letzte Bedarfsperiode (j) Bereitstellungsperiode (τ)	1	2	3	4	5	6
1	500	580	900	1155	1635	2135
2	–	500	660	830	1190	1590
3	–	–	500	585	825	1125
4	–	–	–	500	620	820
5	–	–	–	–	500	600
6	–	–	–	–	–	500

Minimale Kosten einer Lospolitik bis zur Periode 2:

$$f_2 = \min\{c_{12}, f_1 + c_{22}\}$$

Beispiel **SIULSP**

Kosten $c_{\tau j}$ einer (ökonomisch sinnvollen) Teilpolitik $p_{\tau j}$ (eines Loses), die die Bedarfsmengen d_τ bis d_j abdeckt $(\tau = 1, 2, \ldots, 6,\ j = \tau, \tau + 1, \ldots, 6)$

letzte Bedarfsperiode (j) / Bereitstellungsperiode (τ)	1	2	3	4	5	6
1	500	580	900	1155	1635	2135
2	–	500	660	830	1190	1590
3	–	–	500	585	825	1125
4	–	–	–	500	620	820
5	–	–	–	–	500	600
6	–	–	–	–	–	500

Minimale Kosten einer Lospolitik bis zur Periode 2:

$$f_2 = \min\{c_{12}, f_1 + c_{22}\} = \min\{580, 500 + 500\}$$

Beispiel SIULSP

Kosten $c_{\tau j}$ einer (ökonomisch sinnvollen) Teilpolitik $p_{\tau j}$ (eines Loses), die die Bedarfsmengen d_τ bis d_j abdeckt $(\tau = 1, 2, \ldots, 6,\ j = \tau, \tau+1, \ldots, 6)$

letzte Bedarfsperiode (j) Bereitstellungsperiode (τ)	1	2	3	4	5	6
1	500	580	900	1155	1635	2135
2	–	500	660	830	1190	1590
3	–	–	500	585	825	1125
4	–	–	–	500	620	820
5	–	–	–	–	500	600
6	–	–	–	–	–	500

Minimale Kosten einer Lospolitik bis zur Periode 2:

$$f_2 = \min\{c_{12}, f_1 + c_{22}\} = \min\{580, 500 + 500\} = 580$$

Beispiel SIULSP

Kosten $c_{\tau j}$ einer (ökonomisch sinnvollen) Teilpolitik $p_{\tau j}$ (eines Loses), die die Bedarfsmengen d_τ bis d_j abdeckt $(\tau = 1, 2, \ldots, 6,\ j = \tau, \tau+1, \ldots, 6)$

letzte Bedarfsperiode (j) / Bereitstellungsperiode (τ)	1	2	3	4	5	6
1	500	580	900	1155	1635	2135
2	–	500	660	830	1190	1590
3	–	–	500	585	825	1125
4	–	–	–	500	620	820
5	–	–	–	–	500	600
6	–	–	–	–	–	500

Minimale Kosten einer Lospolitik bis zur Periode 2:

$$f_2 = \min\{c_{12}, f_1 + c_{22}\} = \min\{580, 500 + 500\} = 580 \implies P_2^{\text{opt}} = (p_{12})$$

Beispiel **SIULSP**

Kosten $c_{\tau j}$ einer (ökonomisch sinnvollen) Teilpolitik $p_{\tau j}$ (eines Loses), die die Bedarfsmengen d_τ bis d_j abdeckt $(\tau = 1, 2, \ldots, 6,\ j = \tau, \tau + 1, \ldots, 6)$

letzte Bedarfsperiode (j) / Bereitstellungsperiode (τ)	1	2	3	4	5	6
1	500	580	900	1155	1635	2135
2	–	500	660	830	1190	1590
3	–	–	500	585	825	1125
4	–	–	–	500	620	820
5	–	–	–	–	500	600
6	–	–	–	–	–	500

Minimale Kosten einer Lospolitik bis zur Periode 3:

Beispiel SIULSP

Kosten $c_{\tau j}$ einer (ökonomisch sinnvollen) Teilpolitik $p_{\tau j}$ (eines Loses), die die Bedarfsmengen d_τ bis d_j abdeckt $(\tau = 1, 2, \ldots, 6,\ j = \tau, \tau+1, \ldots, 6)$

letzte Bedarfsperiode (j) Bereitstellungsperiode (τ)	1	2	3	4	5	6
1	500	580	900	1155	1635	2135
2	–	500	660	830	1190	1590
3	–	–	500	585	825	1125
4	–	–	–	500	620	820
5	–	–	–	–	500	600
6	–	–	–	–	–	500

Minimale Kosten einer Lospolitik bis zur Periode 3:

$$f_3 = \min\{c_{13}, f_1 + c_{23}, f_2 + c_{33}\}$$

Beispiel **SIULSP**

Kosten $c_{\tau j}$ einer (ökonomisch sinnvollen) Teilpolitik $p_{\tau j}$ (eines Loses), die die Bedarfsmengen d_τ bis d_j abdeckt $(\tau = 1, 2, \ldots, 6,\ j = \tau, \tau+1, \ldots, 6)$

letzte Bedarfsperiode (j) / Bereitstellungsperiode (τ)	1	2	3	4	5	6
1	500	580	900	1155	1635	2135
2	–	500	660	830	1190	1590
3	–	–	500	585	825	1125
4	–	–	–	500	620	820
5	–	–	–	–	500	600
6	–	–	–	–	–	500

Minimale Kosten einer Lospolitik bis zur Periode 3:

$$f_3 = \min\{c_{13}, f_1 + c_{23}, f_2 + c_{33}\} = \min\{900, 500 + 660, 580 + 500\}$$

Beispiel **SIULSP**

Kosten $c_{\tau j}$ einer (ökonomisch sinnvollen) Teilpolitik $p_{\tau j}$ (eines Loses), die die Bedarfsmengen d_τ bis d_j abdeckt $(\tau = 1, 2, \ldots, 6,\ j = \tau, \tau + 1, \ldots, 6)$

letzte Bedarfsperiode (j) Bereitstellungsperiode (τ)	1	2	3	4	5	6
1	500	580	900	1155	1635	2135
2	–	500	660	830	1190	1590
3	–	–	500	585	825	1125
4	–	–	–	500	620	820
5	–	–	–	–	500	600
6	–	–	–	–	–	500

Minimale Kosten einer Lospolitik bis zur Periode 3:

$$f_3 = \min\{c_{13}, f_1 + c_{23}, f_2 + c_{33}\} = \min\{900, 500 + 660, 580 + 500\} = 900$$

Beispiel **SIULSP**

Kosten $c_{\tau j}$ einer (ökonomisch sinnvollen) Teilpolitik $p_{\tau j}$ (eines Loses), die die Bedarfsmengen d_τ bis d_j abdeckt $(\tau = 1, 2, \ldots, 6,\ j = \tau, \tau+1, \ldots, 6)$

letzte Bedarfsperiode (j) / Bereitstellungsperiode (τ)	1	2	3	4	5	6
1	500	580	900	1155	1635	2135
2	–	500	660	830	1190	1590
3	–	–	500	585	825	1125
4	–	–	–	500	620	820
5	–	–	–	–	500	600
6	–	–	–	–	–	500

Minimale Kosten einer Lospolitik bis zur Periode 3:

$$f_3 = \min\{c_{13}, f_1 + c_{23}, f_2 + c_{33}\} = \min\{900, 500 + 660, 580 + 500\} = 900$$

$$\Longrightarrow P_3^{\text{opt}} = (p_{13})$$

Beispiel SIULSP

Kosten $c_{\tau j}$ einer (ökonomisch sinnvollen) Teilpolitik $p_{\tau j}$ (eines Loses), die die Bedarfsmengen d_τ bis d_j abdeckt $(\tau = 1, 2, \ldots, 6,\ j = \tau, \tau+1, \ldots, 6)$

letzte Bedarfsperiode (j) / Bereitstellungsperiode (τ)	1	2	3	4	5	6
1	500	580	900	1155	1635	2135
2	–	500	660	830	1190	1590
3	–	–	500	585	825	1125
4	–	–	–	500	620	820
5	–	–	–	–	500	600
6	–	–	–	–	–	500

Minimale Kosten einer Lospolitik bis zur Periode 4:

Beispiel **SIULSP**

Kosten $c_{\tau j}$ einer (ökonomisch sinnvollen) Teilpolitik $p_{\tau j}$ (eines Loses), die die Bedarfsmengen d_τ bis d_j abdeckt $(\tau = 1, 2, \ldots, 6,\ j = \tau, \tau + 1, \ldots, 6)$

letzte Bedarfsperiode (j) Bereitstellungsperiode (τ)	1	2	3	4	5	6
1	500	580	900	1155	1635	2135
2	–	500	660	830	1190	1590
3	–	–	500	585	825	1125
4	–	–	–	500	620	820
5	–	–	–	–	500	600
6	–	–	–	–	–	500

Minimale Kosten einer Lospolitik bis zur Periode 4:

$$f_4 = \min\{c_{14}, f_1 + c_{24}, f_2 + c_{34}, f_3 + c_{44}\}$$

Beispiel SIULSP

Kosten $c_{\tau j}$ einer (ökonomisch sinnvollen) Teilpolitik $p_{\tau j}$ (eines Loses), die die Bedarfsmengen d_τ bis d_j abdeckt $(\tau = 1, 2, \ldots, 6,\ j = \tau, \tau + 1, \ldots, 6)$

letzte Bedarfsperiode (j) Bereitstellungsperiode (τ)	1	2	3	4	5	6
1	500	580	900	1155	1635	2135
2	–	500	660	830	1190	1590
3	–	–	500	585	825	1125
4	–	–	–	500	620	820
5	–	–	–	–	500	600
6	–	–	–	–	–	500

Minimale Kosten einer Lospolitik bis zur Periode 4:

$$f_4 = \min\{1155, 500 + 830, 580 + 585, 900 + 500\}$$

Beispiel **SIULSP**

Kosten $c_{\tau j}$ einer (ökonomisch sinnvollen) Teilpolitik $p_{\tau j}$ (eines Loses), die die Bedarfsmengen d_τ bis d_j abdeckt $(\tau = 1, 2, \ldots, 6,\ j = \tau, \tau+1, \ldots, 6)$

letzte Bedarfsperiode (j) Bereitstellungsperiode (τ)	1	2	3	4	5	6
1	500	580	900	1155	1635	2135
2	–	500	660	830	1190	1590
3	–	–	500	585	825	1125
4	–	–	–	500	620	820
5	–	–	–	–	500	600
6	–	–	–	–	–	500

Minimale Kosten einer Lospolitik bis zur Periode 4:

$$f_4 = \min\{1155, 500 + 830, 580 + 585, 900 + 500\} = 1155$$

Beispiel **SIULSP**

Kosten $c_{\tau j}$ einer (ökonomisch sinnvollen) Teilpolitik $p_{\tau j}$ (eines Loses), die die Bedarfsmengen d_τ bis d_j abdeckt $(\tau = 1, 2, \ldots, 6,\ j = \tau, \tau + 1, \ldots, 6)$

letzte Bedarfsperiode (j) / Bereitstellungsperiode (τ)	1	2	3	4	5	6
1	500	580	900	1155	1635	2135
2	–	500	660	830	1190	1590
3	–	–	500	585	825	1125
4	–	–	–	500	620	820
5	–	–	–	–	500	600
6	–	–	–	–	–	500

Minimale Kosten einer Lospolitik bis zur Periode 4:

$$f_4 = \min\{1155, 500 + 830, 580 + 585, 900 + 500\} = 1155$$

$$\Longrightarrow P_4^{\text{opt}} = (p_{14})$$

Beispiel **SIULSP**

Kosten $c_{\tau j}$ einer (ökonomisch sinnvollen) Teilpolitik $p_{\tau j}$ (eines Loses), die die Bedarfsmengen d_τ bis d_j abdeckt $(\tau = 1, 2, \ldots, 6,\ j = \tau, \tau + 1, \ldots, 6)$

letzte Bedarfsperiode (j) Bereitstellungsperiode (τ)	1	2	3	4	5	6
1	500	580	900	1155	1635	2135
2	–	500	660	830	1190	1590
3	–	–	500	585	825	1125
4	–	–	–	500	620	820
5	–	–	–	–	500	600
6	–	–	–	–	–	500

Minimale Kosten einer Lospolitik bis zur Periode 5:

Beispiel **SIULSP**

Kosten $c_{\tau j}$ einer (ökonomisch sinnvollen) Teilpolitik $p_{\tau j}$ (eines Loses), die die Bedarfsmengen d_τ bis d_j abdeckt $(\tau = 1, 2, \ldots, 6,\ j = \tau, \tau+1, \ldots, 6)$

letzte Bedarfsperiode (j) / Bereitstellungsperiode (τ)	1	2	3	4	5	6
1	500	580	900	1155	1635	2135
2	–	500	660	830	1190	1590
3	–	–	500	585	825	1125
4	–	–	–	500	620	820
5	–	–	–	–	500	600
6	–	–	–	–	–	500

Minimale Kosten einer Lospolitik bis zur Periode 5:

$$f_5 = \min\{c_{15}, f_1 + c_{25}, f_2 + c_{35}, f_3 + c_{45}, f_4 + c_{55}\}$$

Beispiel **SIULSP**

Kosten $c_{\tau j}$ einer (ökonomisch sinnvollen) Teilpolitik $p_{\tau j}$ (eines Loses), die die Bedarfsmengen d_τ bis d_j abdeckt $(\tau = 1, 2, \ldots, 6,\ j = \tau, \tau + 1, \ldots, 6)$

letzte Bedarfsperiode (j) / Bereitstellungsperiode (τ)	1	2	3	4	5	6
1	500	580	900	1155	1635	2135
2	–	500	660	830	1190	1590
3	–	–	500	585	825	1125
4	–	–	–	500	620	820
5	–	–	–	–	500	600
6	–	–	–	–	–	500

Minimale Kosten einer Lospolitik bis zur Periode 5:

$$f_5 = \min\{1635, 500 + 1190, 580 + 825, 900 + 620, 1155 + 500\}$$

Beispiel **SIULSP**

Kosten $c_{\tau j}$ einer (ökonomisch sinnvollen) Teilpolitik $p_{\tau j}$ (eines Loses), die die Bedarfsmengen d_τ bis d_j abdeckt $(\tau = 1, 2, \ldots, 6,\ j = \tau, \tau + 1, \ldots, 6)$

letzte Bedarfsperiode (j) Bereitstellungsperiode (τ)	1	2	3	4	5	6
1	500	580	900	1155	1635	2135
2	–	500	660	830	1190	1590
3	–	–	500	585	825	1125
4	–	–	–	500	620	820
5	–	–	–	–	500	600
6	–	–	–	–	–	500

Minimale Kosten einer Lospolitik bis zur Periode 5:

$$f_5 = \min\{1635, 500 + 1190, 580 + 825, 900 + 620, 1155 + 500\} = 1405$$

Beispiel **SIULSP**

Kosten $c_{\tau j}$ einer (ökonomisch sinnvollen) Teilpolitik $p_{\tau j}$ (eines Loses), die die Bedarfsmengen d_τ bis d_j abdeckt $(\tau = 1, 2, \ldots, 6,\ j = \tau, \tau+1, \ldots, 6)$

letzte Bedarfsperiode (j) / Bereitstellungsperiode (τ)	1	2	3	4	5	6
1	500	580	900	1155	1635	2135
2	–	500	660	830	1190	1590
3	–	–	500	585	825	1125
4	–	–	–	500	620	820
5	–	–	–	–	500	600
6	–	–	–	–	–	500

Minimale Kosten einer Lospolitik bis zur Periode 5:

$$f_5 = \min\{1635, 500 + 1190, 580 + 825, 900 + 620, 1155 + 500\} = 1405$$

$$\Longrightarrow P_5^{\text{opt}} = (P_2^{\text{opt}}, p_{35})$$

Beispiel **SIULSP**

Kosten $c_{\tau j}$ einer (ökonomisch sinnvollen) Teilpolitik $p_{\tau j}$ (eines Loses), die die Bedarfsmengen d_τ bis d_j abdeckt $(\tau = 1, 2, \ldots, 6,\ j = \tau, \tau + 1, \ldots, 6)$

letzte Bedarfsperiode (j) / Bereitstellungsperiode (τ)	1	2	3	4	5	6
1	500	580	900	1155	1635	2135
2	–	500	660	830	1190	1590
3	–	–	500	585	825	1125
4	–	–	–	500	620	820
5	–	–	–	–	500	600
6	–	–	–	–	–	500

Minimale Kosten einer Lospolitik bis zur Periode 5:

$$f_5 = \min\{1635, 500 + 1190, 580 + 825, 900 + 620, 1155 + 500\} = 1405$$

$$\Longrightarrow P_5^{\text{opt}} = (P_2^{\text{opt}}, p_{35}) = (p_{12}, p_{35})$$

Beispiel **SIULSP**

Kosten $c_{\tau j}$ einer (ökonomisch sinnvollen) Teilpolitik $p_{\tau j}$ (eines Loses), die die Bedarfsmengen d_τ bis d_j abdeckt $(\tau = 1, 2, \ldots, 6,\ j = \tau, \tau + 1, \ldots, 6)$

letzte Bedarfsperiode (j) Bereitstellungsperiode (τ)	1	2	3	4	5	6
1	500	580	900	1155	1635	2135
2	–	500	660	830	1190	1590
3	–	–	500	585	825	1125
4	–	–	–	500	620	820
5	–	–	–	–	500	600
6	–	–	–	–	–	500

Minimale Kosten einer Lospolitik bis zur Periode 6:

Beispiel **SIULSP**

Kosten $c_{\tau j}$ einer (ökonomisch sinnvollen) Teilpolitik $p_{\tau j}$ (eines Loses), die die Bedarfsmengen d_τ bis d_j abdeckt $(\tau = 1, 2, \ldots, 6,\ j = \tau, \tau+1, \ldots, 6)$

letzte Bedarfsperiode (j) Bereitstellungsperiode (τ)	1	2	3	4	5	6
1	500	580	900	1155	1635	2135
2	–	500	660	830	1190	1590
3	–	–	500	585	825	1125
4	–	–	–	500	620	820
5	–	–	–	–	500	600
6	–	–	–	–	–	500

Minimale Kosten einer Lospolitik bis zur Periode 6:

$$f_6 = \min\{c_{16}, f_1 + c_{26}, f_2 + c_{36}, f_3 + c_{46}, f_4 + c_{56}, f_5 + c_{66}\}$$

Beispiel **SIULSP**

Kosten $c_{\tau j}$ einer (ökonomisch sinnvollen) Teilpolitik $p_{\tau j}$ (eines Loses), die die Bedarfsmengen d_τ bis d_j abdeckt $(\tau = 1, 2, \ldots, 6,\ j = \tau, \tau+1, \ldots, 6)$

letzte Bedarfsperiode (j) / Bereitstellungsperiode (τ)	1	2	3	4	5	6
1	500	580	900	1155	1635	2135
2	–	500	660	830	1190	1590
3	–	–	500	585	825	1125
4	–	–	–	500	620	820
5	–	–	–	–	500	600
6	–	–	–	–	–	500

Minimale Kosten einer Lospolitik bis zur Periode 6:

$$f_6 = \min\{2135, 500 + 1590, 580 + 1125, 900 + 820, 1155 + 600, 1405 + 500\}$$

Beispiel **SIULSP**

Kosten $c_{\tau j}$ einer (ökonomisch sinnvollen) Teilpolitik $p_{\tau j}$ (eines Loses), die die Bedarfsmengen d_τ bis d_j abdeckt $(\tau = 1, 2, \ldots, 6,\ j = \tau, \tau + 1, \ldots, 6)$

letzte Bedarfsperiode (j) / Bereitstellungsperiode (τ)	1	2	3	4	5	6
1	500	580	900	1155	1635	2135
2	–	500	660	830	1190	1590
3	–	–	500	585	825	1125
4	–	–	–	500	620	820
5	–	–	–	–	500	600
6	–	–	–	–	–	500

Minimale Kosten einer Lospolitik bis zur Periode 6:

$$f_6 = \min\{2135, 500 + 1590, 580 + 1125, 900 + 820, 1155 + 600, 1405 + 500\} = 1705$$

Beispiel **SIULSP**

Kosten $c_{\tau j}$ einer (ökonomisch sinnvollen) Teilpolitik $p_{\tau j}$ (eines Loses), die die Bedarfsmengen d_τ bis d_j abdeckt $(\tau = 1, 2, \ldots, 6,\ j = \tau, \tau + 1, \ldots, 6)$

letzte Bedarfsperiode (j) / Bereitstellungsperiode (τ)	1	2	3	4	5	6
1	500	580	900	1155	1635	2135
2	–	500	660	830	1190	1590
3	–	–	500	585	825	1125
4	–	–	–	500	620	820
5	–	–	–	–	500	600
6	–	–	–	–	–	500

Minimale Kosten einer Lospolitik bis zur Periode 6:

$$f_6 = \min\{2135, 500 + 1590, 580 + 1125, 900 + 820, 1155 + 600, 1405 + 500\} = 1705$$

$$\Longrightarrow P_6^{\text{opt}} = (P_2^{\text{opt}}, p_{36})$$

Beispiel **SIULSP**

Kosten $c_{\tau j}$ einer (ökonomisch sinnvollen) Teilpolitik $p_{\tau j}$ (eines Loses), die die Bedarfsmengen d_τ bis d_j abdeckt $(\tau = 1, 2, \ldots, 6,\ j = \tau, \tau+1, \ldots, 6)$

letzte Bedarfsperiode (j) / Bereitstellungsperiode (τ)	1	2	3	4	5	6
1	500	580	900	1155	1635	2135
2	–	500	660	830	1190	1590
3	–	–	500	585	825	1125
4	–	–	–	500	620	820
5	–	–	–	–	500	600
6	–	–	–	–	–	500

Minimale Kosten einer Lospolitik bis zur Periode 6:

$$f_6 = \min\{2135, 500 + 1590, 580 + 1125, 900 + 820, 1155 + 600, 1405 + 500\} = 1705$$

$$\Longrightarrow P_6^{\text{opt}} = (P_2^{\text{opt}}, p_{36}) = (p_{12}, p_{36})$$

Vom klassischen Losgrößenmodell inspirierte Praxisheuristiken

Heuristische Lösungsverfahren:

- **Stückkostenverfahren (Least-Unit-Cost-Verfahren)**

  Vergrößere j, solange die durchschnittlichen Stückkosten sinken !

Heuristische Lösungsverfahren:

- **Stückkostenverfahren (Least-Unit-Cost-Verfahren)**

  Vergrößere j, solange $c_{\tau j} = \dfrac{s + h \cdot \sum\limits_{t=\tau}^{j} (t-\tau) \cdot d_t}{\sum\limits_{t=\tau}^{j} d_t}$ sinkt !

Heuristische Lösungsverfahren:

- **Stückkostenverfahren (Least-Unit-Cost-Verfahren)**

  Vergrößere j, solange $c_{\tau j} = \dfrac{s + h \cdot \sum\limits_{t=\tau}^{j} (t-\tau) \cdot d_t}{\sum\limits_{t=\tau}^{j} d_t}$ sinkt !

- **Stückperiodenausgleichsverfahren (Part-Period-Verfahren)**

  Vergrößere j, solange Lagerkosten $\leq$ Rüstkosten !

Heuristische Lösungsverfahren:

- **Stückkostenverfahren (Least-Unit-Cost-Verfahren)**

  Vergrößere j, solange $c_{\tau j} = \dfrac{s + h \cdot \sum\limits_{t=\tau}^{j} (t-\tau) \cdot d_t}{\sum\limits_{t=\tau}^{j} d_t}$ sinkt!

- **Stückperiodenausgleichsverfahren (Part-Period-Verfahren)**

  Vergrößere j, solange $\sum\limits_{t=\tau}^{j} (t-\tau) \cdot d_t \leq \dfrac{s}{h}$!

Heuristische Lösungsverfahren:

- **Stückkostenverfahren (Least-Unit-Cost-Verfahren)**

  Vergrößere j, solange $c_{\tau j} = \dfrac{s + h \cdot \sum\limits_{t=\tau}^{j} (t-\tau) \cdot d_t}{\sum\limits_{t=\tau}^{j} d_t}$ sinkt !

- **Stückperiodenausgleichsverfahren (Part-Period-Verfahren)**

  Vergrößere j, solange $\sum\limits_{t=\tau}^{j} (t-\tau) \cdot d_t \leq \dfrac{s}{h}$!

- **Silver-Meal-Verfahren**

  Vergrößere j, solange die durchschnittlichen Kosten pro ZE sinken !

Heuristische Lösungsverfahren:

- **Stückkostenverfahren (Least-Unit-Cost-Verfahren)**

  Vergrößere j, solange $c_{\tau j} = \dfrac{s + h \cdot \sum\limits_{t=\tau}^{j} (t-\tau) \cdot d_t}{\sum\limits_{t=\tau}^{j} d_t}$ sinkt!

- **Stückperiodenausgleichsverfahren (Part-Period-Verfahren)**

  Vergrößere j, solange $\sum\limits_{t=\tau}^{j} (t-\tau) \cdot d_t \leq \dfrac{s}{h}$!

- **Silver-Meal-Verfahren**

  Vergrößere j, solange $c_{\tau j} = \dfrac{s + h \cdot \sum\limits_{t=\tau}^{j} (t-\tau) \cdot d_t}{j - \tau + 1}$ sinkt!

Das dynamische einstufige Mehrprodukt-Losgrößenproblem

Modell SIULSP

Minimiere die Summe aus Rüstkosten und Lagerkosten:

$$Z = \sum_{t=1}^{T} (h \cdot y_t + s \cdot \gamma_t + p_t \cdot q_t)$$

u. B. d. R.:

Bedarf in Periode t:

$$y_{t-1} + q_t - y_t = d_t \qquad \text{für alle } t = 1, 2, \ldots, T$$

Es muss gerüstet werden, wenn $q_t > 0$ ist:

$$q_t - M \cdot \gamma_t \leq 0 \qquad \text{für alle } t = 1, 2, \ldots, T$$

Wertebereich:

$$q_t \geq 0;\ y_t \geq 0;\ y_0 = 0;\ y_T = 0;\ \gamma_t \in \{0, 1\} \qquad \text{für alle } t = 1, 2, \ldots, T$$

Modell SIULSP

Minimiere die Summe aus Rüstkosten und Lagerkosten:

$$Z = \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{t=1}^{T} (h_k \cdot y_{kt} + s_k \cdot \gamma_{kt} + p_{kt} \cdot q_{kt})$$

u. B. d. R.:

Bedarf in Periode t:

$$y_{k,t-1} + q_{kt} - y_{kt} = d_{kt} \qquad \text{für alle } k \in \mathcal{K} \text{ und } t = 1, 2, \ldots, T$$

Es muss gerüstet werden, wenn $q_{kt} > 0$ ist:

$$q_{kt} - M \cdot \gamma_{kt} \leq 0 \qquad \text{für alle } k \in \mathcal{K} \text{ und } t = 1, 2, \ldots, T$$

Wertebereich:

$$q_{kt} \geq 0;\ y_{kt} \geq 0;\ y_{k0} = 0;\ y_{kT} = 0;\ \gamma_{kt} \in \{0, 1\} \qquad \text{für alle } k \in \mathcal{K} \text{ und } t = 1, 2, \ldots, T$$

Modell SIULSP

Was ist gegeben — **Indexmengen**:

$\mathcal{K}$ ... die Menge der betrachteten Produkte

Was ist gegeben — **Daten**:

d_{kt} ... Bedarf für Produkt k in Periode t

$y_k^{(0)}$ ... Anfangslagerbestand für Produkt k

s_k ... Rüstkostensatz für Produkt k

h_k ... Lagerkostensatz für Produkt k

p_{kt} ... variable Produktionskosten für Produkt k in Periode t

Modell SIULSP

Was ist gegeben — **Indexmengen**:

$\mathcal{K}$ ... die Menge der betrachteten Produkte

$\mathcal{J}$ ... die Menge der gemeinsam genutzten Ressourcen

Was ist gegeben — **Daten**:

d_{kt} ... Bedarf für Produkt k in Periode t

$y_k^{(0)}$ ... Anfangslagerbestand für Produkt k

s_k ... Rüstkostensatz für Produkt k

h_k ... Lagerkostensatz für Produkt k

p_{kt} ... variable Produktionskosten für Produkt k in Periode t

Modell CLSP

Was ist gegeben — **Indexmengen**:

$\mathcal{K}$ ... die Menge der betrachteten Produkte

$\mathcal{J}$ ... die Menge der gemeinsam genutzten Ressourcen

Was ist gegeben — **Daten**:

d_{kt} ... Bedarf für Produkt k in Periode t

$y_k^{(0)}$ ... Anfangslagerbestand für Produkt k

s_k ... Rüstkostensatz für Produkt k

h_k ... Lagerkostensatz für Produkt k

p_{kt} ... variable Produktionskosten für Produkt k in Periode t

tb_{jk} ... Stückbearbeitungszeit für Produkt k auf Ressource j

tr_{jk} ... Rüstzeit für Produkt k auf Ressource j

b_{jt} ... Kapazität der Ressource j in Periode t

Modell CLSP

Minimiere die Summe aus Rüstkosten und Lagerkosten:

$$Z = \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{t=1}^{T} (h_k \cdot y_{kt} + s_k \cdot \gamma_{kt} + p_{kt} \cdot q_{kt})$$

u. B. d. R.:

Bedarf in Periode t:

$y_{k,t-1} + q_{kt} - y_{kt} = d_{kt}$ für alle $k \in \mathcal{K}$ und $t = 1, 2, \ldots, T$

Es muss gerüstet werden, wenn $q_{kt} > 0$ ist:

$q_{kt} - M \cdot \gamma_{kt} \leq 0$ für alle $k \in \mathcal{K}$ und $t = 1, 2, \ldots, T$

Wertebereich:

$q_{kt} \geq 0;\ y_{kt} \geq 0;\ y_{k0} = 0;\ y_{kT} = 0;\ \gamma_{kt} \in \{0, 1\}$ für alle $k \in \mathcal{K}$ und $t = 1, 2, \ldots, T$

Modell CLSP

Minimiere die Summe aus Rüstkosten und Lagerkosten:

$$Z = \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{t=1}^{T} (h_k \cdot y_{kt} + s_k \cdot \gamma_{kt} + p_{kt} \cdot q_{kt})$$

u. B. d. R.:

Bedarf in Periode t:

$y_{k,t-1} + q_{kt} - y_{kt} = d_{kt}$ für alle $k \in \mathcal{K}$ und $t = 1, 2, \ldots, T$

Es muss gerüstet werden, wenn $q_{kt} > 0$ ist:

$q_{kt} - M \cdot \gamma_{kt} \leq 0$ für alle $k \in \mathcal{K}$ und $t = 1, 2, \ldots, T$

Wertebereich:

$q_{kt} \geq 0;\ y_{kt} \geq 0;\ y_{k0} = 0;\ y_{kT} = 0;\ \gamma_{kt} \in \{0, 1\}$ für alle $k \in \mathcal{K}$ und $t = 1, 2, \ldots, T$

Modell CLSP

Minimiere die Summe aus Rüstkosten und Lagerkosten:

$$Z = \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{t=1}^{T} (h_k \cdot y_{kt} + s_k \cdot \gamma_{kt} + p_{kt} \cdot q_{kt})$$

u. B. d. R.:

Bedarf in Periode t:

$$y_{k,t-1} + q_{kt} - y_{kt} = d_{kt} \qquad \text{für alle } k \in \mathcal{K} \text{ und } t = 1, 2, \ldots, T$$

Kapazitäten in Periode t:

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} \left(\mathsf{tb}_{jk} \cdot q_{kt} + \mathsf{tr}_{jk} \cdot \gamma_{kt} \right) \leq b_{jt} \qquad \text{für alle } j \in \mathcal{J} \text{ und } t = 1, 2, \ldots, T$$

Es muss gerüstet werden, wenn $q_{kt} > 0$ ist:

$$q_{kt} - M \cdot \gamma_{kt} \leq 0 \qquad \text{für alle } k \in \mathcal{K} \text{ und } t = 1, 2, \ldots, T$$

Wertebereich:

$$q_{kt} \geq 0;\ y_{kt} \geq 0;\ y_{k0} = 0;\ y_{kT} = 0;\ \gamma_{kt} \in \{0, 1\} \qquad \text{für alle } k \in \mathcal{K} \text{ und } t = 1, 2, \ldots, T$$

Das dynamische einstufige Mehrprodukt-Losgrößenproblem mit Rüstzustandsübernahme

Übernahme des Rüstzustands von Periode t nach $t+1$

- Ein Erzeugnis wird als letztes in Periode t und als erstes in Periode $t+1$ produziert.
- Am Ende der Periode t wird Leerzeit der Maschine genutzt, um für das erste in Periode $t+1$ zu produzierende Produkt umzurüsten

Falls in der Periode t überhaupt nicht produziert wird,

- kann gerüstet und der Rüstzustand in die nächste Periode übertragen werden.
- kann der aus der Vorperiode übernommene Rüstzustand in die nächste Periode übertragen werden.