

Vorlesung 07: Transportproblem

Grundlagen Operations Research

Prof. Dr. Knut Haase

Spannender Baum

Ein Netz für sechs Städte



Aufgabe und Definition

Gesucht ist ein **gesamtkostenminimales** Streckennetz, das n Orte direkt oder indirekt verbindet.

Minimaler spannender Baum

In einem zusammenhängenden, bewerteten, ungerichteten Graphen G ist T^* ein **minimaler spannender Baum**, wenn kein anderer spannender Baum eine **geringere** Gesamtbewertung besitzt.

Der Kruskal-Algorithmus



Idee

Kanten **aufsteigend** nach Bewertung durchgehen und jede Kante aufnehmen, die **keinen Kreis** erzeugt, bis $n - 1$ Kanten gewählt sind.

Der Kruskal-Algorithmus

Idee

Kanten **aufsteigend** nach Bewertung durchgehen und jede Kante aufnehmen, die **keinen Kreis** erzeugt, bis $n - 1$ Kanten gewählt sind.

- **Start:** Kanten sortieren, $\lambda(k_1) \leq \lambda(k_2) \leq \dots$

Der Kruskal-Algorithmus

Idee

Kanten **aufsteigend** nach Bewertung durchgehen und jede Kante aufnehmen, die **keinen Kreis** erzeugt, bis $n - 1$ Kanten gewählt sind.

- **Start:** Kanten sortieren, $\lambda(k_1) \leq \lambda(k_2) \leq \dots$
- **Iteration:** k_μ aufnehmen, falls kein Kreis entsteht.

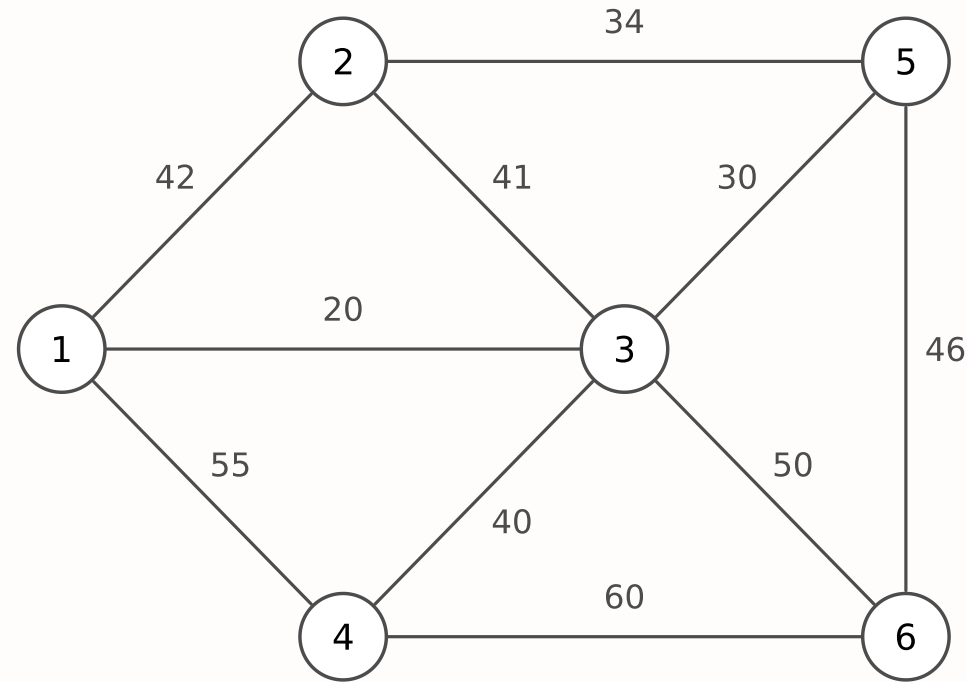
Der Kruskal-Algorithmus

Idee

Kanten **aufsteigend** nach Bewertung durchgehen und jede Kante aufnehmen, die **keinen Kreis** erzeugt, bis $n - 1$ Kanten gewählt sind.

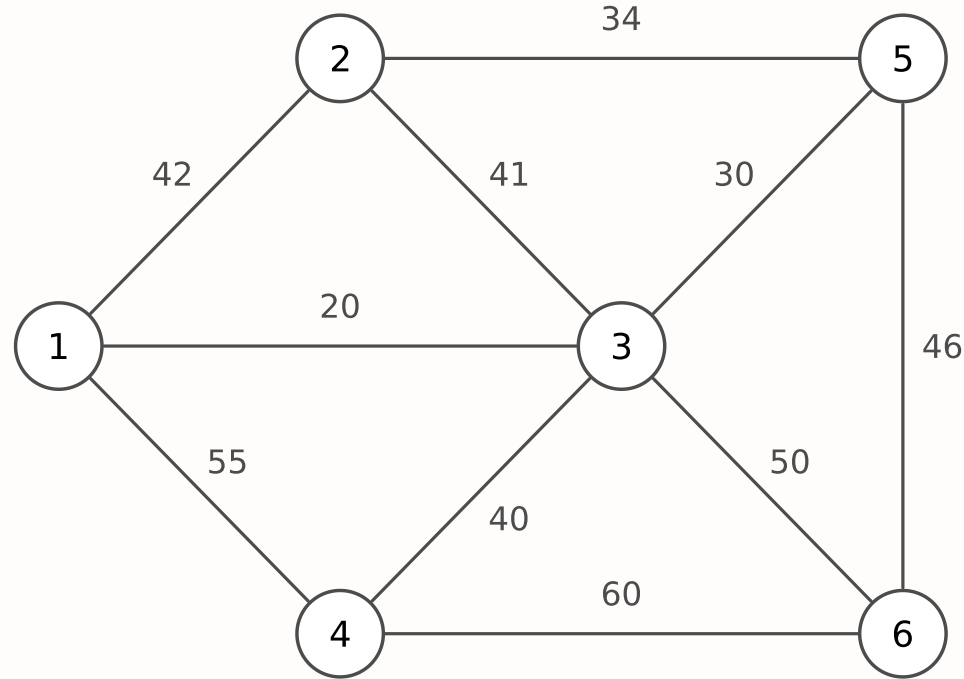
- **Start:** Kanten sortieren, $\lambda(k_1) \leq \lambda(k_2) \leq \dots$
- **Iteration:** k_μ aufnehmen, falls kein Kreis entsteht.
- **Abbruch:** sobald $\bar{\mathcal{E}}$ genau $n - 1$ Kanten enthält.

Beispiel: Flugstreckennetz



Sechs Städte, zehn mögliche Verbindungen mit Baukosten.

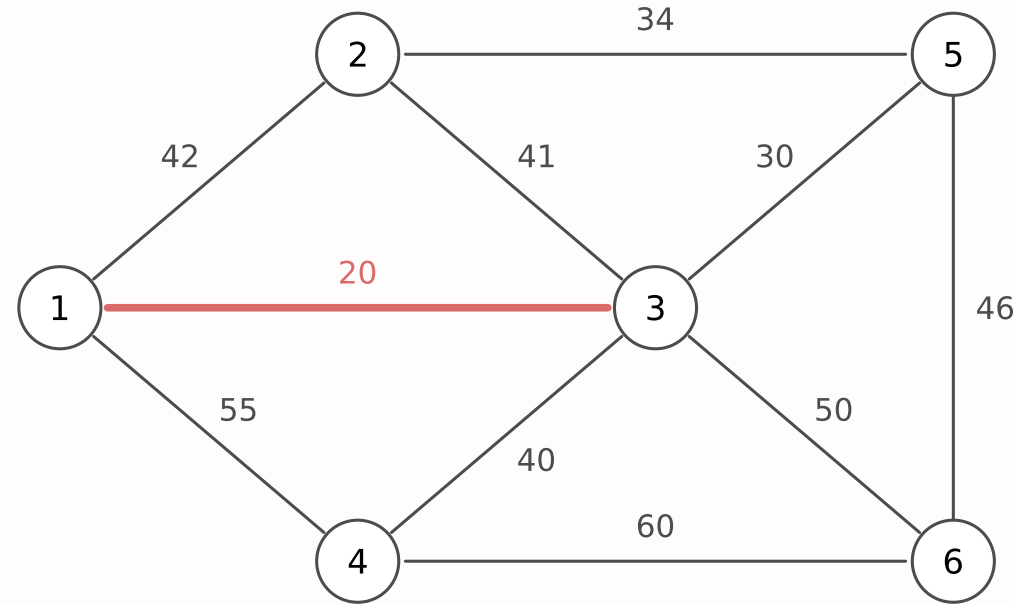
Beispiel: Flugstreckennetz



Sechs Städte, zehn mögliche Verbindungen mit Baukosten.

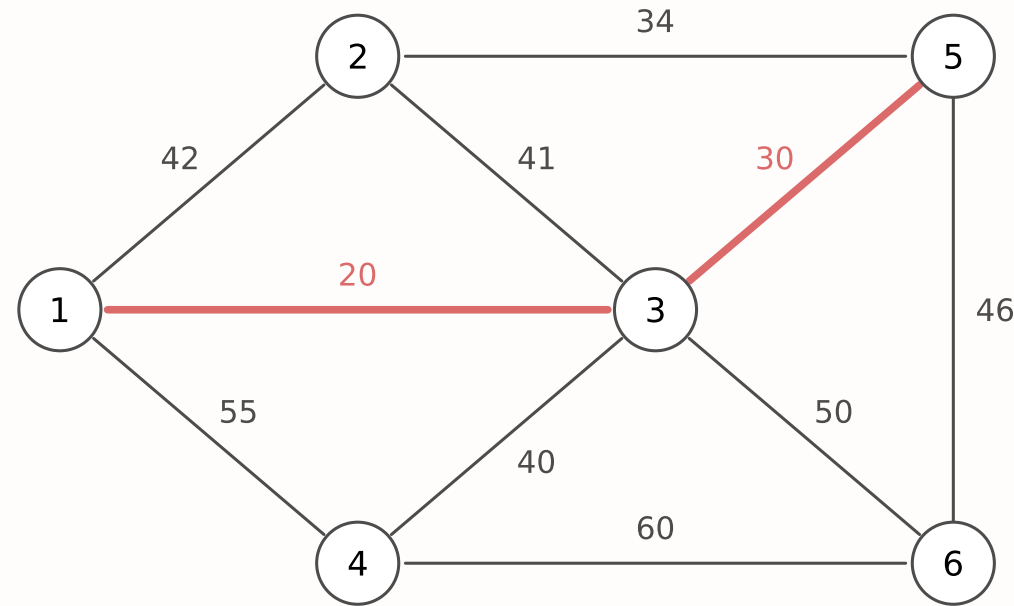
Frage: Welche fünf Kanten würden Sie wählen?

Kruskal Schritt für Schritt



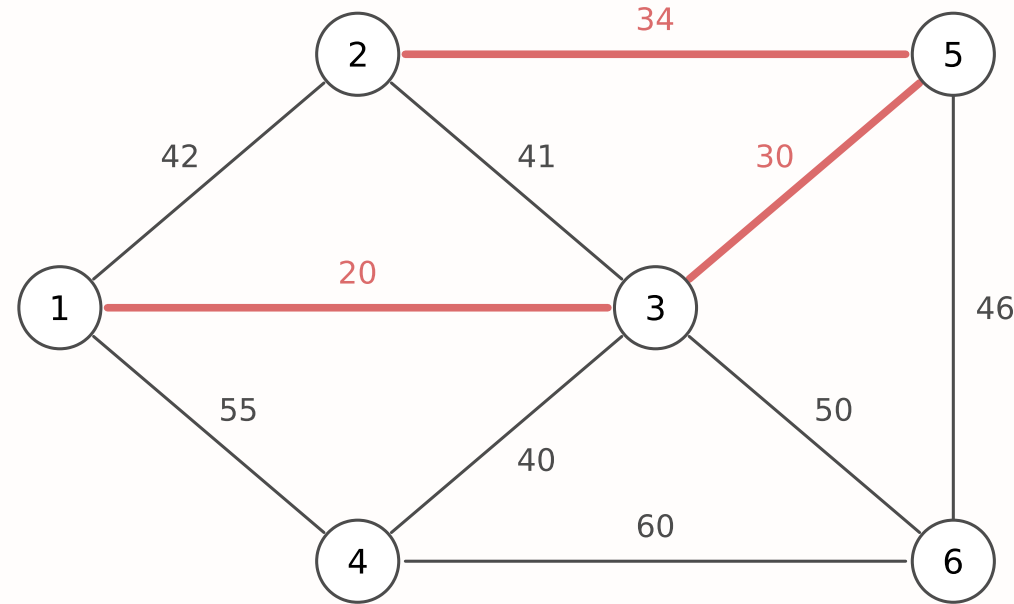
Günstigste Kante zuerst: $[1, 3]$ mit 20.

Kruskal Schritt für Schritt



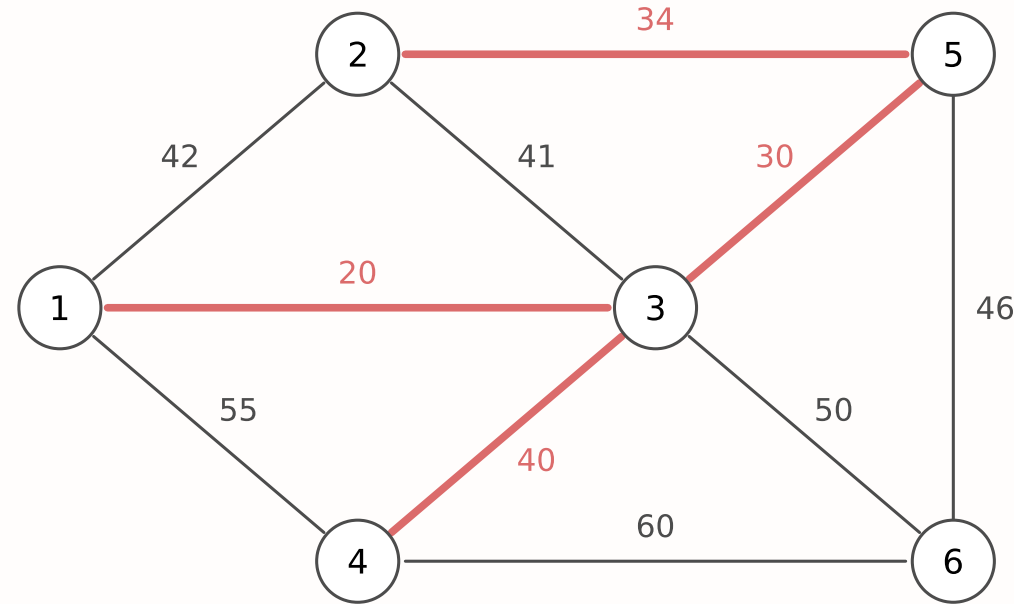
[3, 5] mit 30: kein Kreis, aufnehmen.

Kruskal Schritt für Schritt



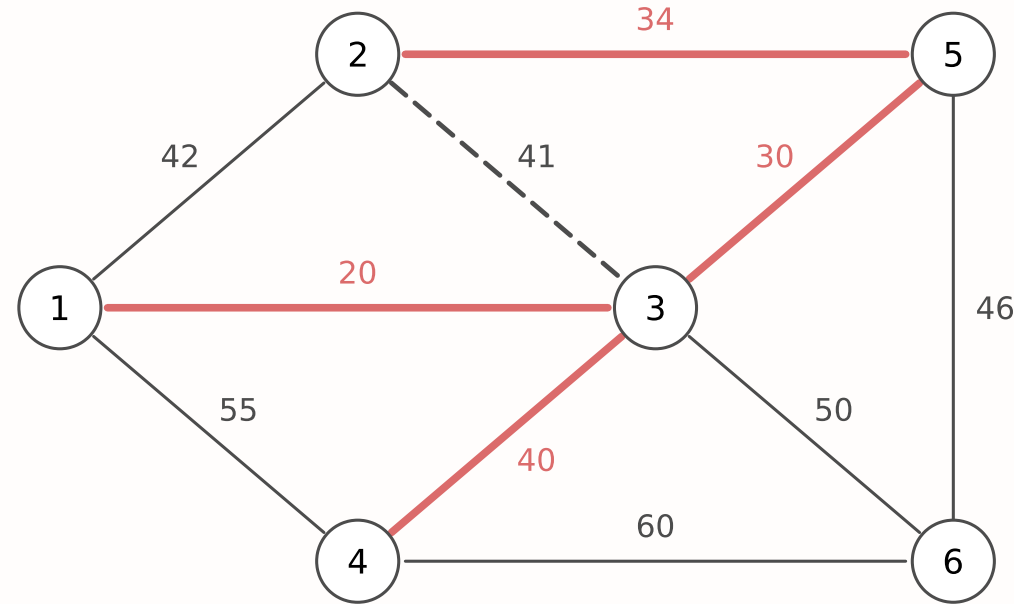
[2, 5] mit 34: kein Kreis, aufnehmen.

Kruskal Schritt für Schritt



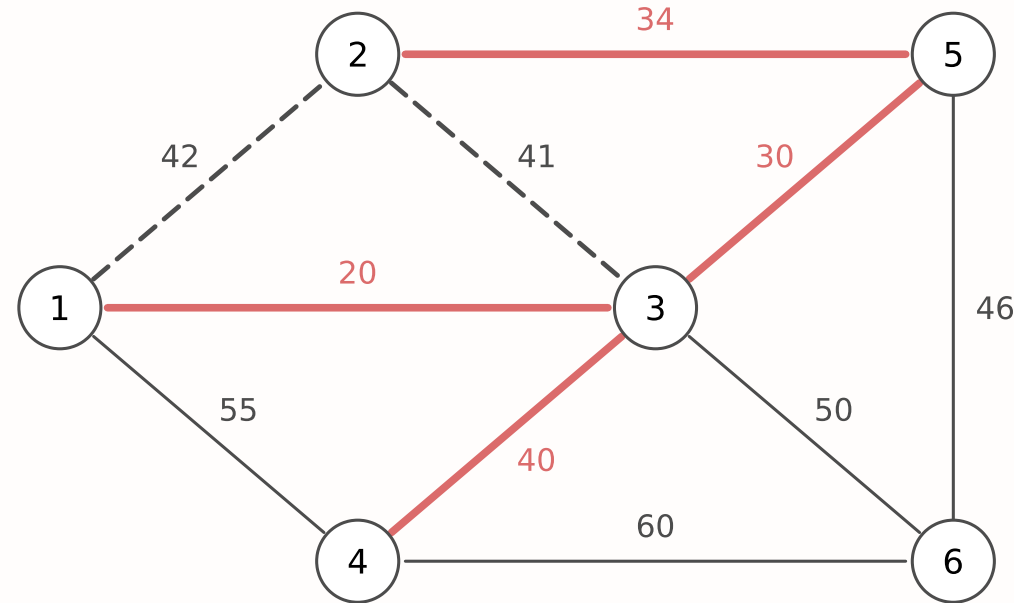
[3,4] mit 40: kein Kreis, aufnehmen.

Kruskal Schritt für Schritt



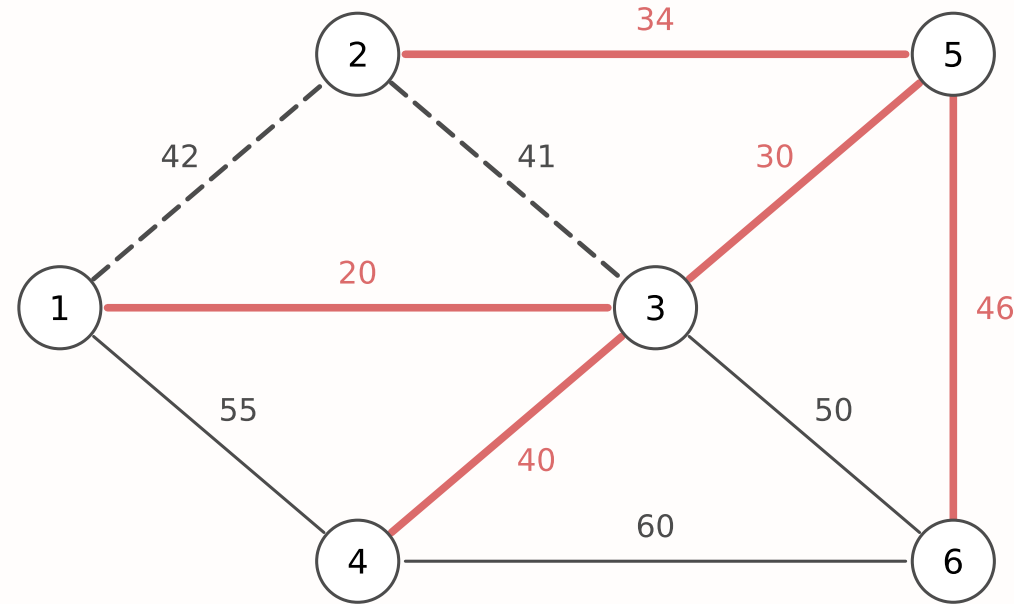
[2,3] mit 41: würde den **Kreis** 2 – 3 – 5 – 2 schließen, verwerfen.

Kruskal Schritt für Schritt



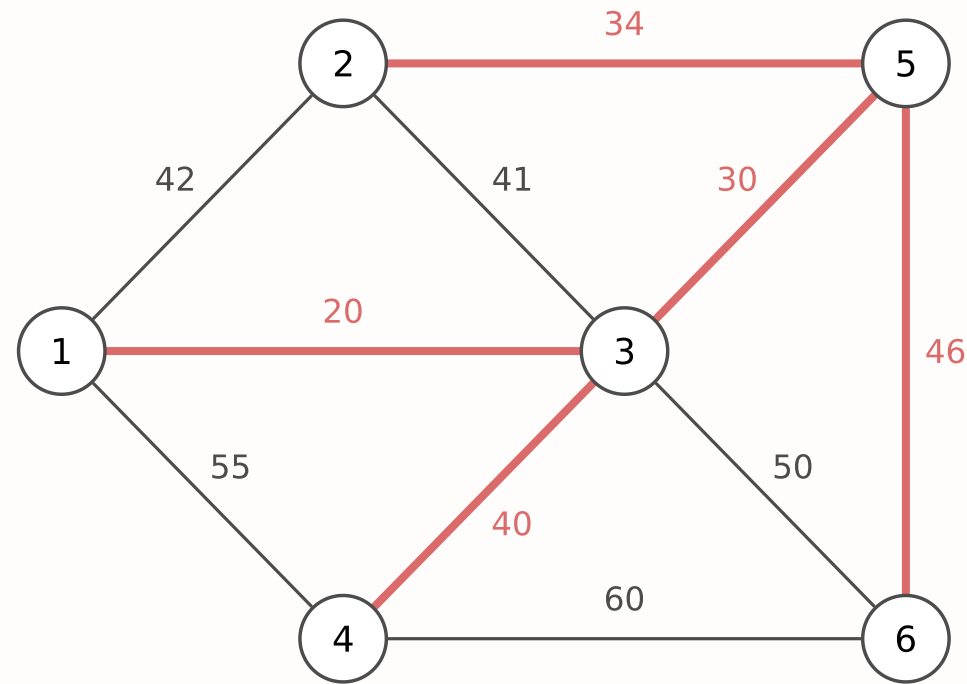
[1,2] mit 42: würde den **Kreis** 1 – 2 – 5 – 3 – 1 schließen, verwerfen.

Kruskal Schritt für Schritt



[5,6] mit 46, die fünfte Kante: $n - 1 = 5$, **fertig**.

Der minimale spannende Baum



! Ergebnis

Kanten [1,3], [3,5], [2,5], [3,4], [5,6] mit
Gesamtbewertung
 $20 + 30 + 34 + 40 + 46 = 170$

Minimaler 1-Baum

Ein **1-Baum** ist zusammenhängend mit **genau einem** Kreis.

Voraussetzung: ein **vollständiger** Graph ohne parallele Kanten und Schlingen.

Minimaler 1-Baum

Ein **1-Baum** ist zusammenhängend mit **genau einem** Kreis.

Voraussetzung: ein **vollständiger** Graph ohne parallele Kanten und Schlingen.

1. Entferne einen vorgegebenen Knoten i_0 (kein Artikulationsknoten) samt seiner Kanten.

Minimaler 1-Baum

Ein **1-Baum** ist zusammenhängend mit **genau einem** Kreis.

Voraussetzung: ein **vollständiger** Graph ohne parallele Kanten und Schlingen.

1. Entferne einen vorgegebenen Knoten i_0 (kein Artikulationsknoten) samt seiner Kanten.
2. Bestimme für den Rest mit **Kruskal** einen minimalen spannenden Baum.

Minimaler 1-Baum

Ein **1-Baum** ist zusammenhängend mit **genau einem** Kreis.

Voraussetzung: ein **vollständiger** Graph ohne parallele Kanten und Schlingen.

1. Entferne einen vorgegebenen Knoten i_0 (kein Artikulationsknoten) samt seiner Kanten.
2. Bestimme für den Rest mit **Kruskal** einen minimalen spannenden Baum.
3. Füge i_0 mit seinen **zwei günstigsten** Kanten wieder hinzu.

Minimaler 1-Baum

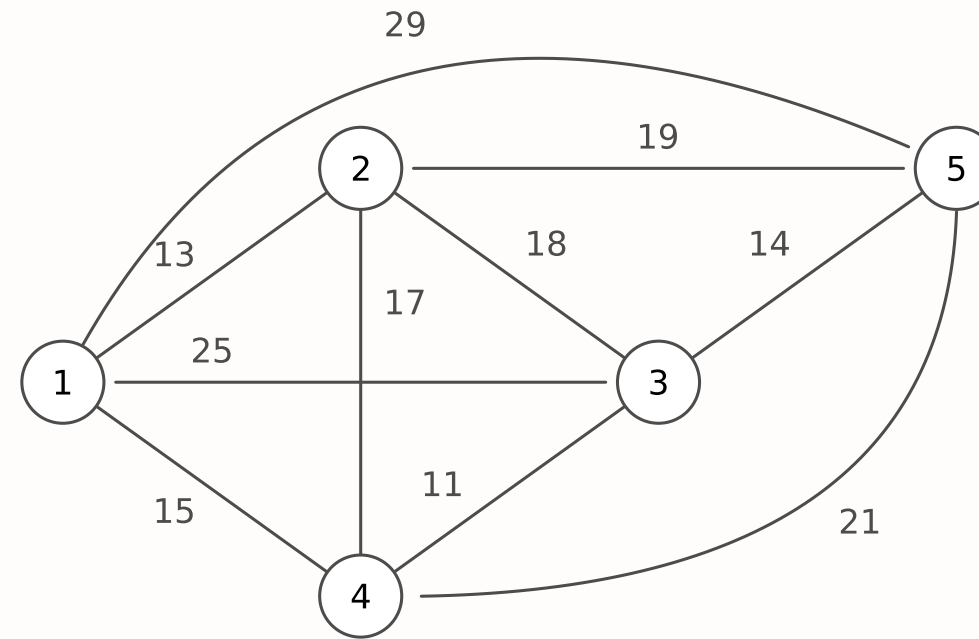
Ein **1-Baum** ist zusammenhängend mit **genau einem** Kreis.

Voraussetzung: ein **vollständiger** Graph ohne parallele Kanten und Schlingen.

1. Entferne einen vorgegebenen Knoten i_0 (kein Artikulationsknoten) samt seiner Kanten.
2. Bestimme für den Rest mit **Kruskal** einen minimalen spannenden Baum.
3. Füge i_0 mit seinen **zwei günstigsten** Kanten wieder hinzu.

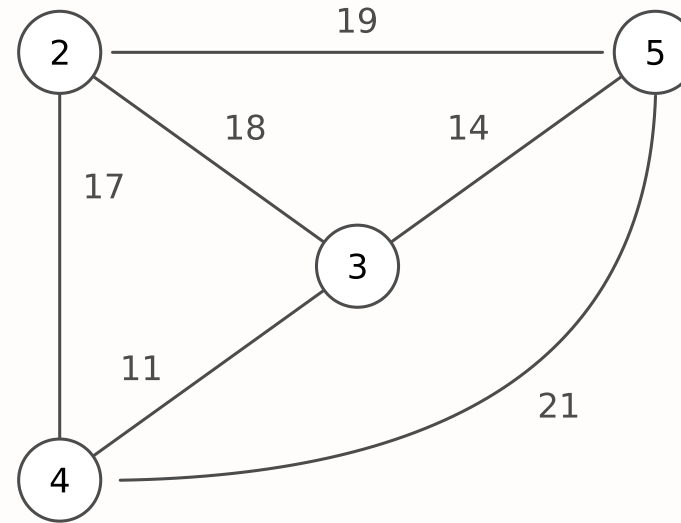
Der 1-Baum liefert eine **untere Schranke** für Rundreiseprobleme (Travelling Salesman).

1-Baum am Beispiel



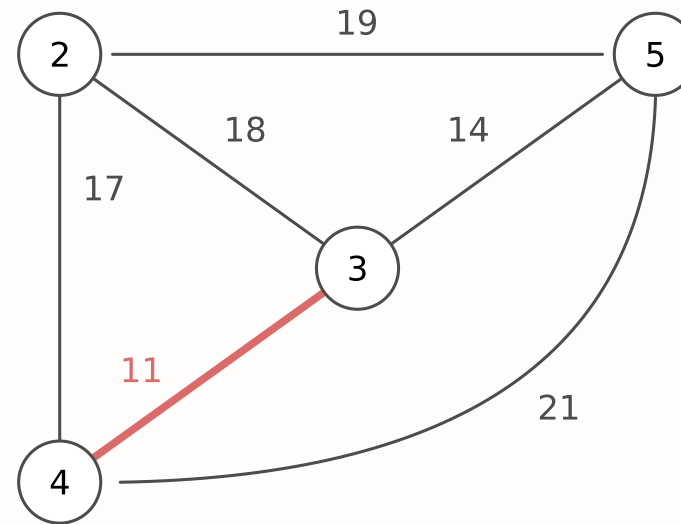
Das Flugstreckennetz ist nicht vollständig. Neues Beispiel: fünf Knoten, jeder mit jedem verbunden.

1-Baum am Beispiel



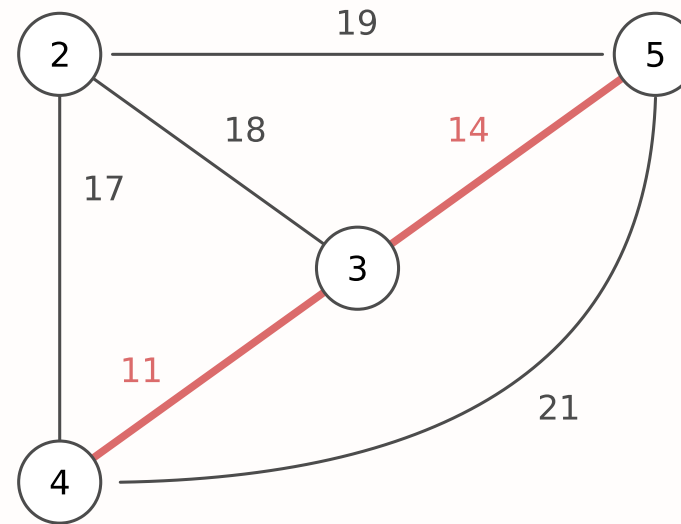
Für $i_0 = 1$: Knoten 1 samt seiner vier Kanten entfernen.

1-Baum am Beispiel



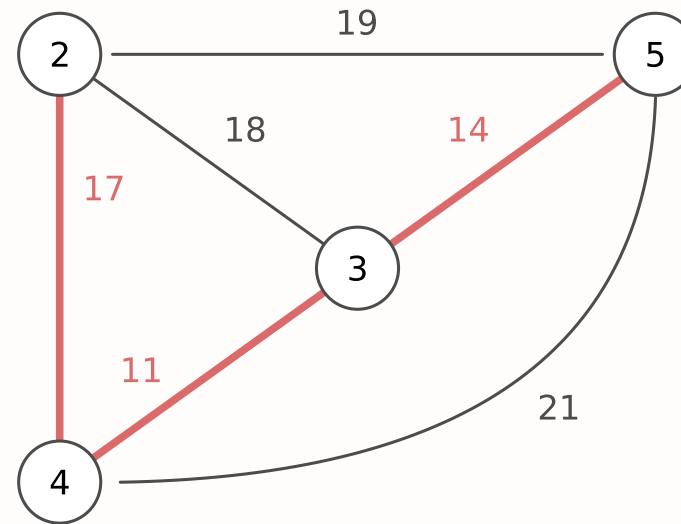
Kruskal auf dem Rest: zuerst $[3,4]$ mit 11, aufnehmen.

1-Baum am Beispiel



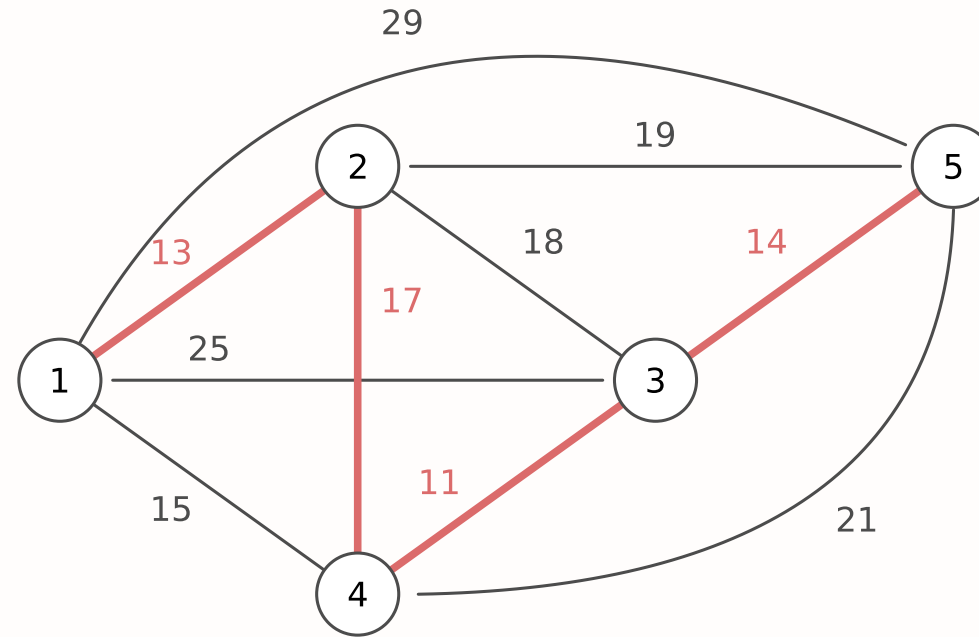
$[3, 5]$ mit 14: kein Kreis, aufnehmen.

1-Baum am Beispiel



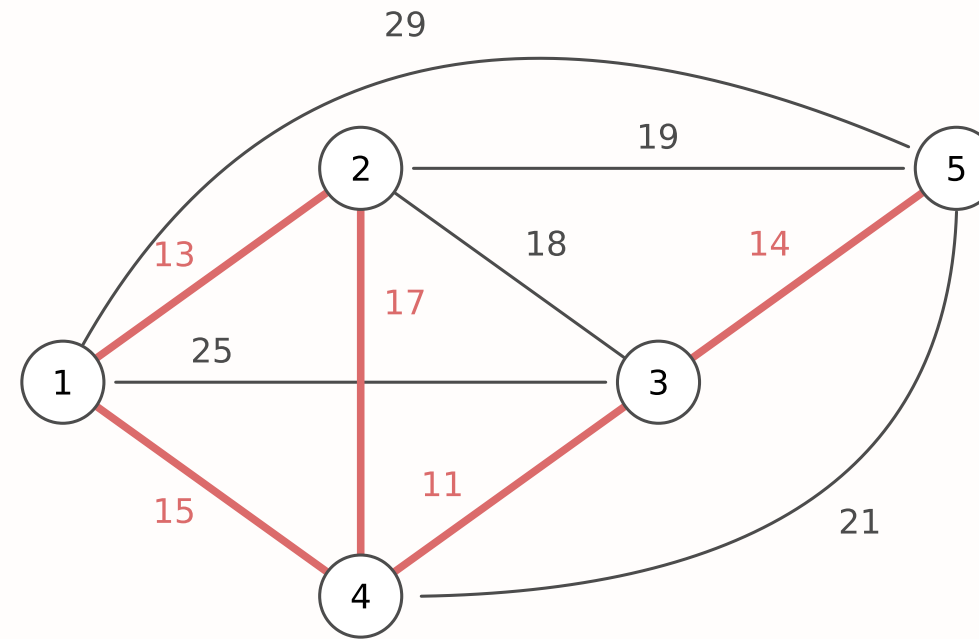
[2,4] mit 17: drei Kanten für vier Knoten, fertig. Kosten $11 + 14 + 17 = 42$.

1-Baum am Beispiel



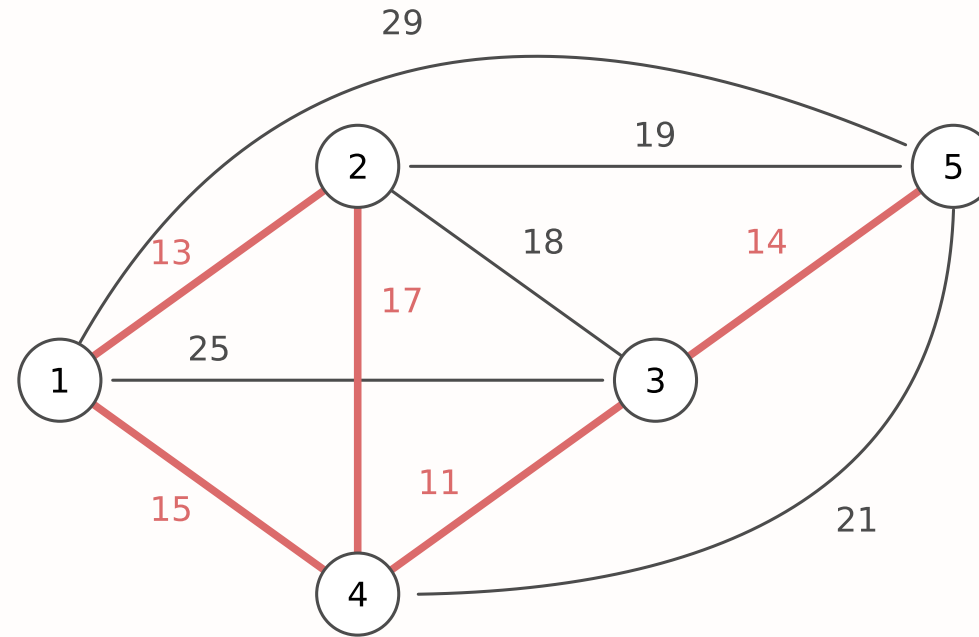
Knoten 1 kehrt zurück: günstigste Kante $[1,2]$ mit 13.

1-Baum am Beispiel



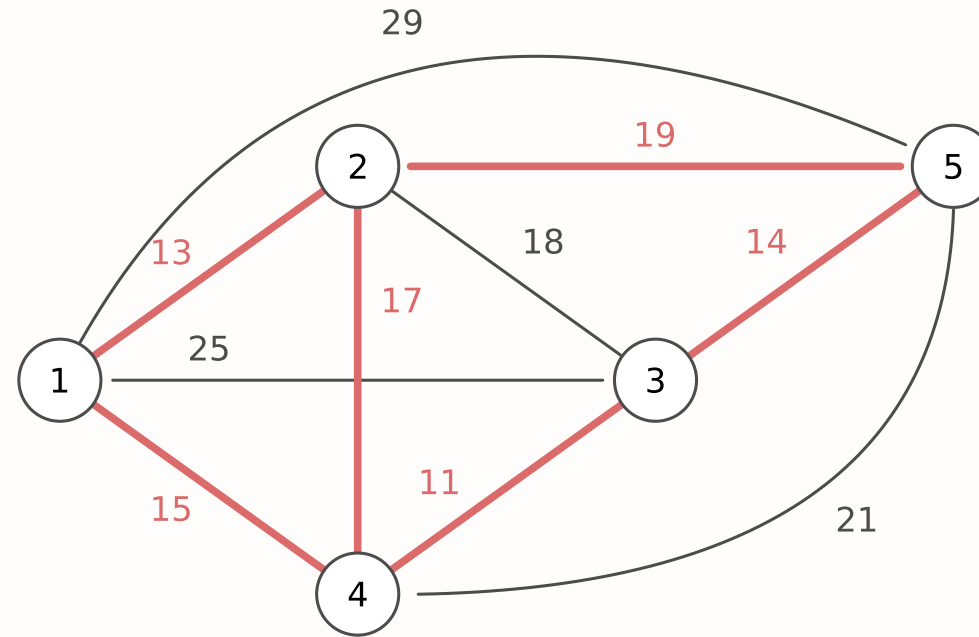
Zweitgünstigste Kante [1,4] mit 15. **Ein** Kreis: 1 – 2 – 4 – 1, gesamt $42 + 13 + 15 = 70$.

Vom 1-Baum zur Rundreise



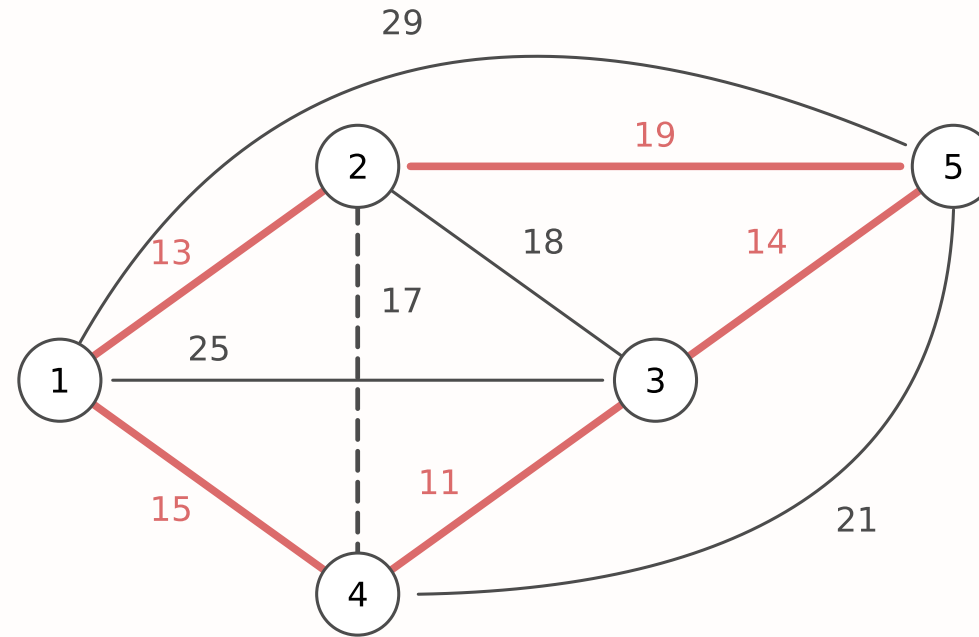
Der 1-Baum mit 70 ist noch keine Rundreise: Knoten 5 hat nur **eine** Kante, Knoten 4 **drei**.

Vom 1-Baum zur Rundreise



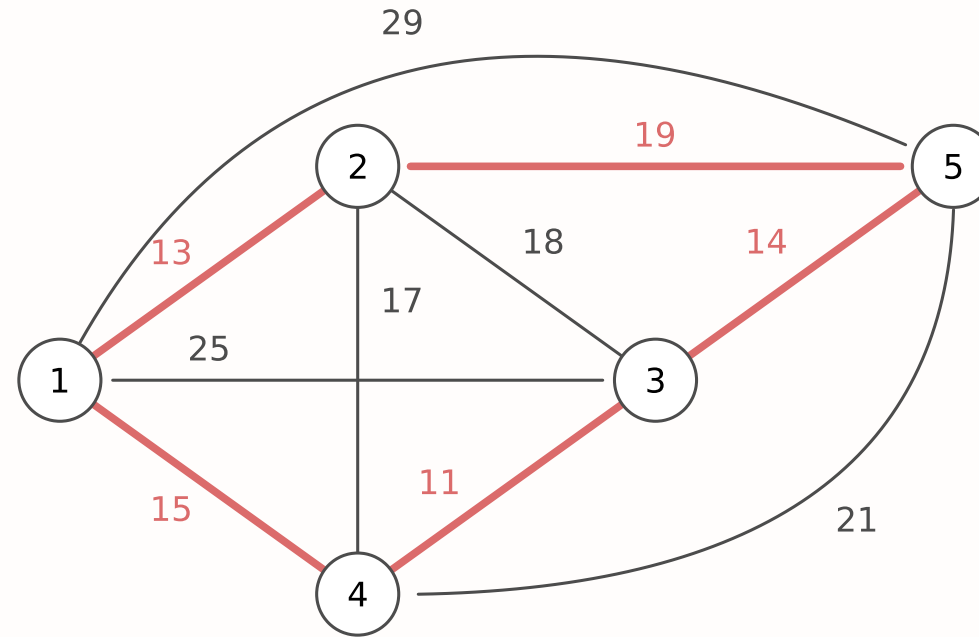
Kante $[2,5]$ mit 19 hinzufügen: Knoten 5 hat nun zwei Kanten, Knoten 2 und 4 je drei.

Vom 1-Baum zur Rundreise



Kante [2,4] mit 17 entfernen: Rundreise 1 – 2 – 5 – 3 – 4 – 1 mit $70 + 19 - 17 = 72$.

Vom 1-Baum zur Rundreise



Untere Schranke: Keine Rundreise ist kürzer als der 1-Baum mit 70; die beste hat hier 72.

Transportproblem

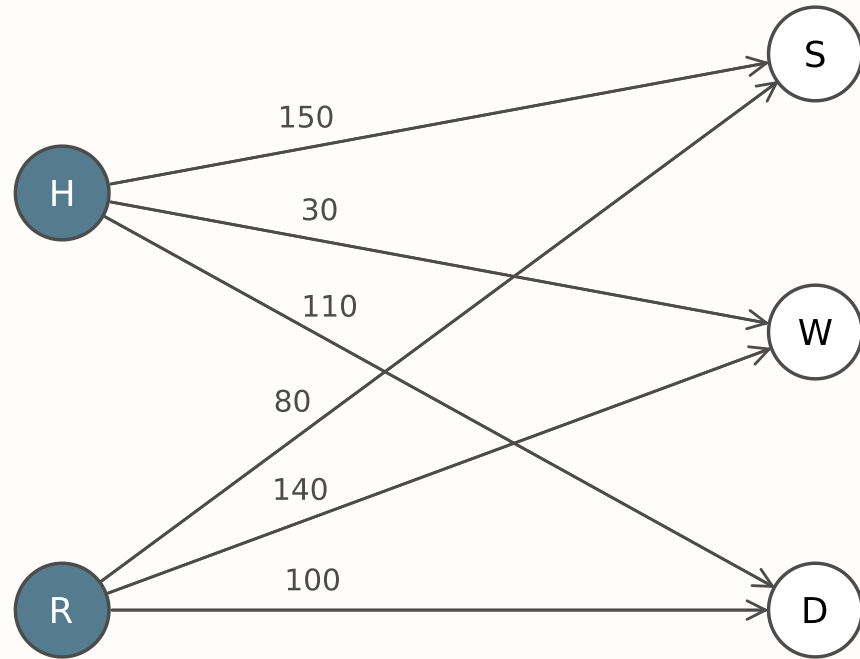
Beispiel: Reifentransport

Ein Unternehmen produziert in **Hannover** und **Regensburg** und beliefert **Stuttgart**, **Wolfsburg** und **Dresden**.

von / nach	S	W	D	Angebot
Hannover	150	30	110	15
Regensburg	80	140	100	15
Nachfrage	13	11	6	30

Summe Angebot = Summe Nachfrage = 30.

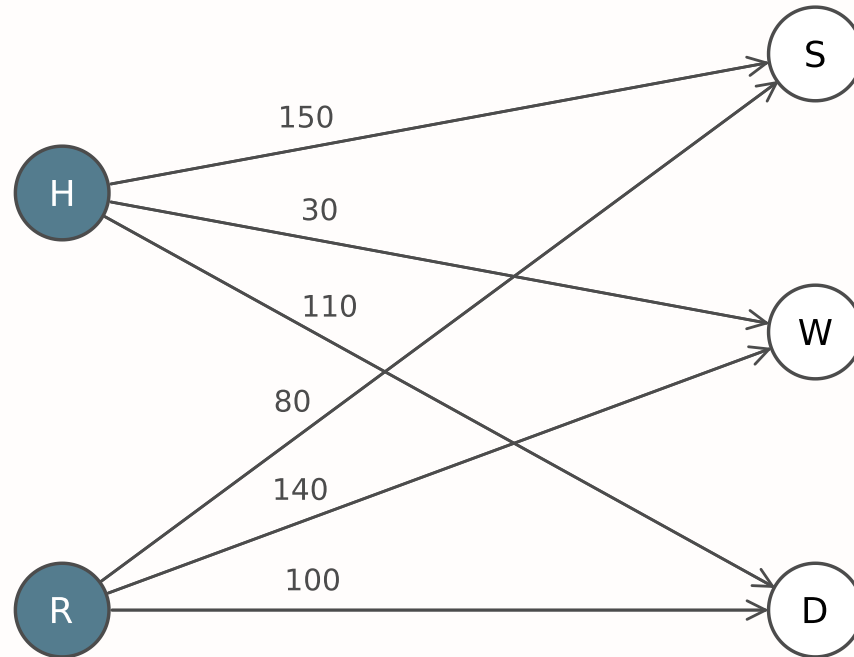
Als Netz



Anbieter **H, R** (Angebot a_i) links, Nachfrager **S, W, D** (Bedarf b_j) rechts.

Jeder Pfeil trägt die **Transportkosten** c_{ij} pro Ladung.

Als Netz



Anbieter **H, R** (Angebot a_i) links, Nachfrager **S, W, D** (Bedarf b_j) rechts.

Jeder Pfeil trägt die **Transportkosten** c_{ij} pro Ladung.

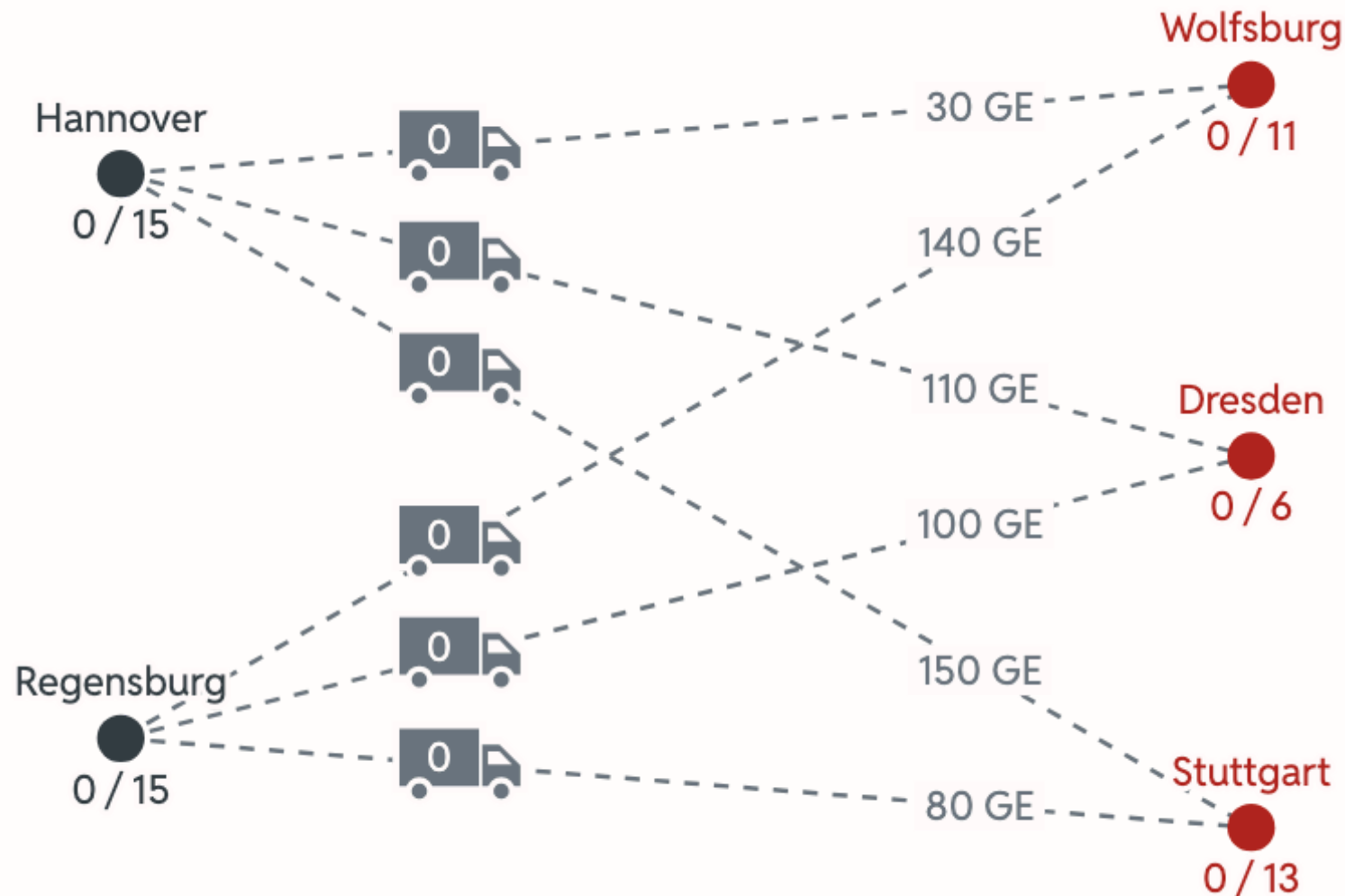


Gleich ausprobieren

Auf der nächsten Folie verteilen Sie die Reifen selbst. Reicht es, wenn jede Stadt die billigste Route nimmt?

Sie sind dran

Decken Sie die Nachfrage jeder Stadt so günstig wie möglich. Tippen Sie auf einen LKW und ändern Sie mit den Knöpfen seine Ladungen.



Eigener Plan 0

Stuttgart fehlen 13
Ladungen

Optimieren

Reset

Neu

Lineares Optimierungsproblem

Was Sie im Spiel von Hand verteilt haben, als Modell:

$$\text{Minimiere } F = \sum_i \sum_j c_{ij} X_{ij}$$

$$\sum_j X_{ij} = a_i \quad \text{für alle } i \quad (u_i)$$

$$\sum_i X_{ij} = b_j \quad \text{für alle } j \quad (v_j)$$

$$X_{ij} \geq 0$$

X_{ij} : Transportmenge von Standort i zu Abnehmer j .

Eine Gleichung ist redundant

Die Angebots- und Nachfragegleichungen sind **nicht** unabhängig:

$$G_1 = G_3 + G_4 + G_5 - G_2$$

Im Beispiel: G_1, G_2 Angebot (Hannover, Regensburg), G_3, G_4, G_5 Nachfrage (Stuttgart, Wolfsburg, Dresden).

Eine Gleichung ist redundant

Die Angebots- und Nachfragegleichungen sind **nicht** unabhängig:

$$G_1 = G_3 + G_4 + G_5 - G_2$$

Im Beispiel: G_1, G_2 Angebot (Hannover, Regensburg), G_3, G_4, G_5 Nachfrage (Stuttgart, Wolfsburg, Dresden).

Eine Gleichung darf **entfallen**. Bei $|I|+|J|$ Restriktionen bleiben $|I|+|J|-1$ unabhängige. Die Dualvariablen sind deshalb nur bis auf eine **Normierung** bestimmt (gleich: $u_1 := 0$).

Angebot ungleich Nachfrage

Ausgleich

Ist $\sum_i a_i > \sum_j b_j$, führt man einen **fiktiven Nachfrager** ein mit

$$b_{|\mathcal{I}|+1} = \sum_i a_i - \sum_j b_j, \quad c_{i,|\mathcal{I}|+1} = 0$$

Angebot ungleich Nachfrage

i Ausgleich

Ist $\sum_i a_i > \sum_j b_j$, führt man einen **fiktiven Nachfrager** ein mit

$$b_{|I|+1} = \sum_i a_i - \sum_j b_j, \quad c_{i,|I|+1} = 0$$

Ist umgekehrt $\sum_j b_j > \sum_i a_i$, kommt ein **fiktiver Anbieter** hinzu:

$$a_{|I|+1} = \sum_j b_j - \sum_i a_i, \quad c_{|I|+1,j} = 0$$

Angebot ungleich Nachfrage

i Ausgleich

Ist $\sum_i a_i > \sum_j b_j$, führt man einen **fiktiven Nachfrager** ein mit

$$b_{|I|+1} = \sum_i a_i - \sum_j b_j, \quad c_{i,|I|+1} = 0$$

Ist umgekehrt $\sum_j b_j > \sum_i a_i$, kommt ein **fiktiver Anbieter** hinzu:

$$a_{|I|+1} = \sum_j b_j - \sum_i a_i, \quad c_{|I|+1,j} = 0$$

So wird jedes Transportproblem auf den **ausgeglichenen** Fall zurückgeführt.

Vogel-Methode

Idee der Methode

Heuristik für eine **gute Startlösung**:



Idee

Betrachte je Zeile und Spalte die **Strafkosten** Δ : die Differenz aus günstigster und zweitgünstigster Verbindung. Zuerst wird dort belegt, wo Δ am **größten** ist (dort wäre Ausweichen am teuersten). Bei Gleichstand entscheidet der kleinere Index (zuerst Zeilen, dann Spalten).

1. Iteration

von / nach	S	W	D	a_i	Δ_i
Hannover	150	30	110	15	80
Regensburg	80	140	100	15	20
b_j	13	11	6		
Δ_j	70	110	10		

$\max \Delta = 110$ (Spalte W) $\Rightarrow X_{1,2} = \min\{15, 11\} = 11$.

2. Iteration

von / nach	S	W	D	a_i	Δ_i
Hannover	150	–	110	4	40
Regensburg	80	–	100	15	20
b_j	13	–	6		
Δ_j	70	–	10		

Spalte W ist gedeckt, Hannover hat noch $15 - 11 = 4$. Neu:
 $\Delta_1 = 150 - 110 = 40$.

$\max \Delta = 70$ (Spalte S) $\Rightarrow X_{2,1} = \min\{15, 13\} = 13$.

3. Iteration

von / nach	S	W	D	a_i	Δ_i
Hannover	–	–	110	4	–
Regensburg	–	–	100	2	–
b_j	–	–	6		
Δ_j	–	–	10		

Spalte S ist gedeckt, Regensburg hat noch $15 - 13 = 2$. Je Zeile bleibt nur eine Zelle, also kein Δ_i .

$$\max \Delta = 10 \text{ (Spalte D)} \Rightarrow X_{2,3} = \min\{2, 6\} = 2.$$

4. Iteration

von / nach	S	W	D	a_i	Δ_i
Hannover	–	–	110	4	–
Regensburg	–	–	–	–	–
b_j	–	–	4		
Δ_j	–	–	–		

Regensburg ist ausgeschöpft, es bleibt nur eine Zelle:

$$X_{1,3} = \min\{4, 4\} = 4.$$

4. Iteration

von / nach	S	W	D	a_i	Δ_i
Hannover	–	–	110	4	–
Regensburg	–	–	–	–	–
b_j	–	–	4		
Δ_j	–	–	–		

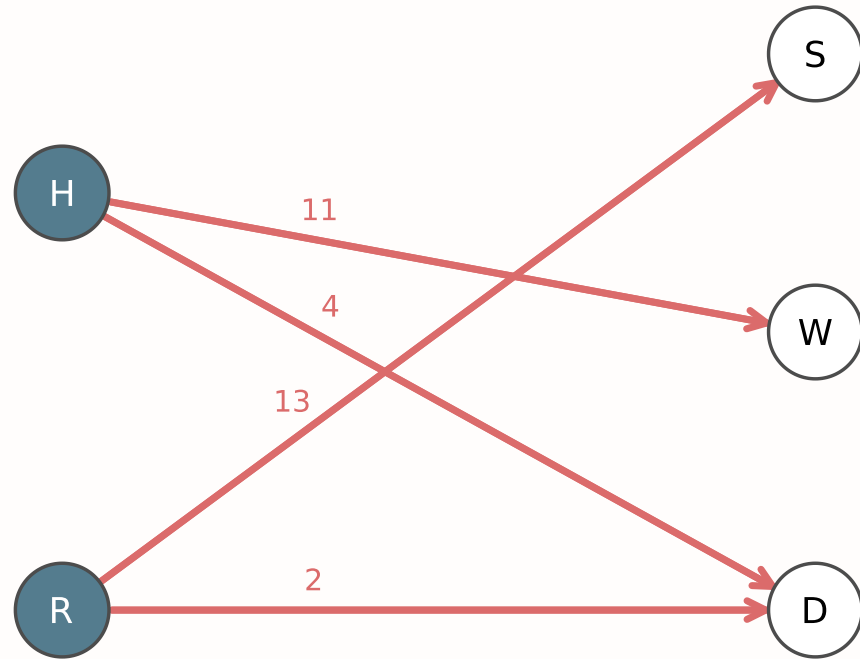
Regensburg ist ausgeschöpft, es bleibt nur eine Zelle:

$$X_{1,3} = \min\{4, 4\} = 4.$$

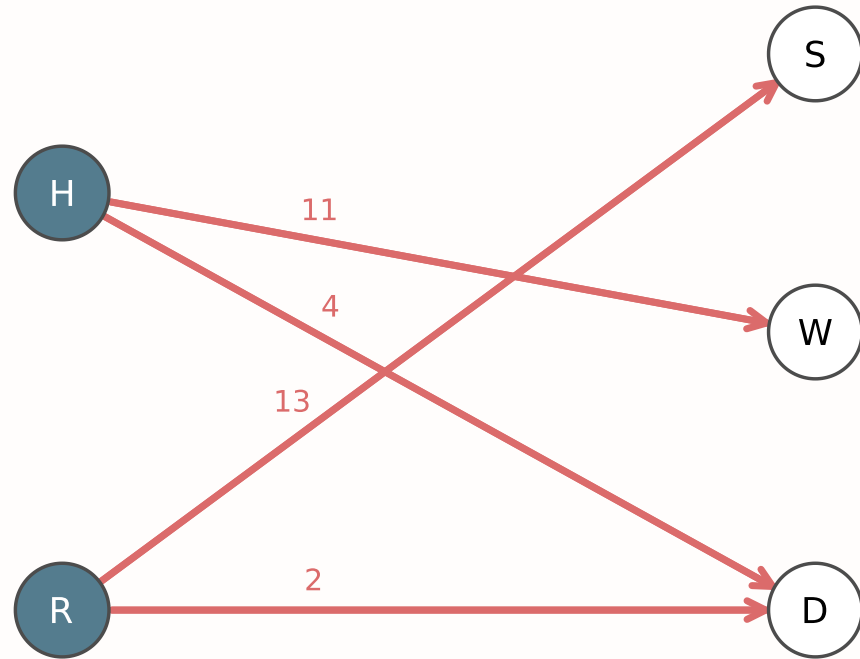
! Startlösung

$$F = 30 \cdot 11 + 80 \cdot 13 + 110 \cdot 4 + 100 \cdot 2 = 2010$$

Lösung als Baum

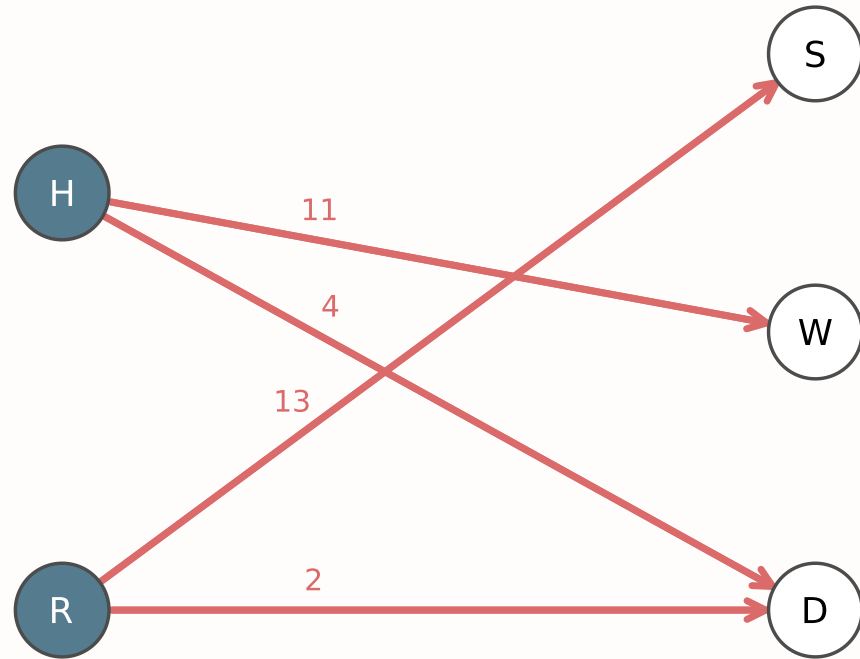


Lösung als Baum



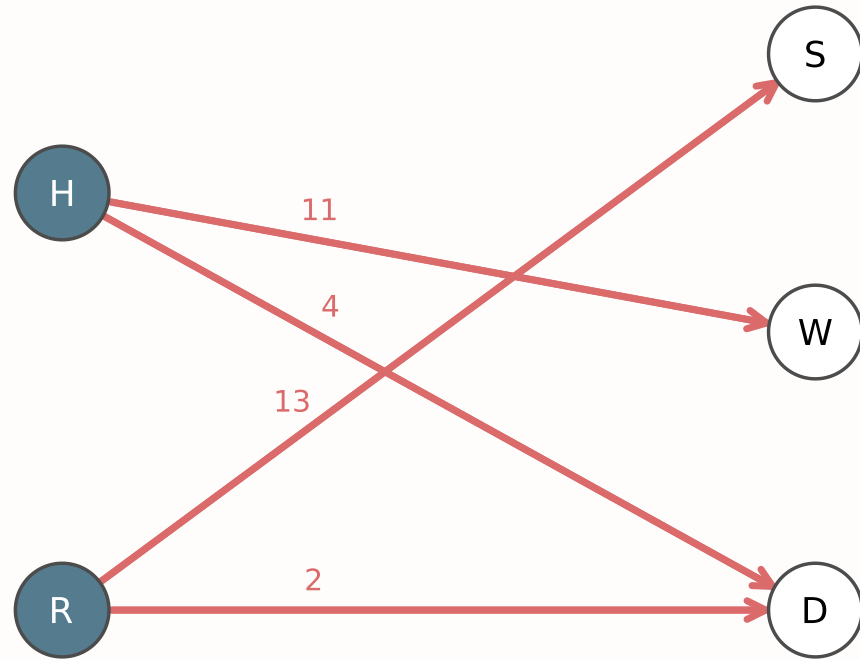
- Je **Basisvariable** eine Kante.

Lösung als Baum



- Je **Basisvariable** eine Kante.
- Anzahl Kanten = Knoten -1 (hier $4 = 5 - 1$).

Lösung als Baum



- Je **Basisvariable** eine Kante.
- Anzahl Kanten = Knoten -1 (hier $4 = 5 - 1$).
- Eine zusätzliche Kante erzeugt einen **Umverteilungskreis**.

MODI-Methode

Reduzierte Kosten

Spezialisiertes LP-Verfahren auf einer zulässigen Startlösung. Die reduzierten Kosten einer Transportvariablen:

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$$

Reduzierte Kosten

Spezialisiertes LP-Verfahren auf einer zulässigen Startlösung. Die reduzierten Kosten einer Transportvariablen:

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$$

Für **Basisvariablen** gilt stets $\bar{c}_{ij} = 0$, also $c_{ij} = u_i + v_j$. Daraus bestimmt man die Dualvariablen u_i, v_j .

Vorgehensweise

Vorgehensweise

1. **Dualvariablen** aus $c_{ij} = u_i + v_j$ der Basisvariablen bestimmen; da eine Gleichung redundant ist, z. B. $u_1 := 0$.

Vorgehensweise

1. **Dualvariablen** aus $c_{ij} = u_i + v_j$ der Basisvariablen bestimmen; da eine Gleichung redundant ist, z. B. $u_1 := 0$.
2. **Reduzierte Kosten** $\bar{c}_{ij}$ aller Nichtbasisvariablen berechnen.

Vorgehensweise

1. **Dualvariablen** aus $c_{ij} = u_i + v_j$ der Basisvariablen bestimmen; da eine Gleichung redundant ist, z. B. $u_1 := 0$.
2. **Reduzierte Kosten** $\bar{c}_{ij}$ aller Nichtbasisvariablen berechnen.
3. Alle $\bar{c}_{ij} \geq 0$: Lösung **optimal**, Abbruch. Sonst die Nichtbasisvariable mit **minimalem** $\bar{c}_{ij} < 0$ aufnehmen.

Vorgehensweise

1. **Dualvariablen** aus $c_{ij} = u_i + v_j$ der Basisvariablen bestimmen; da eine Gleichung redundant ist, z. B. $u_1 := 0$.
2. **Reduzierte Kosten** $\bar{c}_{ij}$ aller Nichtbasisvariablen berechnen.
3. Alle $\bar{c}_{ij} \geq 0$: Lösung **optimal**, Abbruch. Sonst die Nichtbasisvariable mit **minimalem** $\bar{c}_{ij} < 0$ aufnehmen.
4. Im **Umverteilungskreis** verlässt die Basisvariable die Basis, die bei Erhöhung der neuen als erste null wird (bei mehreren nur **eine**).

Vorgehensweise

1. **Dualvariablen** aus $c_{ij} = u_i + v_j$ der Basisvariablen bestimmen; da eine Gleichung redundant ist, z. B. $u_1 := 0$.
2. **Reduzierte Kosten** $\bar{c}_{ij}$ aller Nichtbasisvariablen berechnen.
3. Alle $\bar{c}_{ij} \geq 0$: Lösung **optimal**, Abbruch. Sonst die Nichtbasisvariable mit **minimalem** $\bar{c}_{ij} < 0$ aufnehmen.
4. Im **Umverteilungskreis** verlässt die Basisvariable die Basis, die bei Erhöhung der neuen als erste null wird (bei mehreren nur **eine**).
5. Mit der neuen Lösung weiter bei Schritt 1.

Dualvariablen bestimmen

Aus den vier Basisvariablen und $u_1 := 0$:

$$30 = u_1 + v_2$$

$$110 = u_1 + v_3$$

$$80 = u_2 + v_1$$

$$100 = u_2 + v_3$$

Gesucht: jeweils eine Gleichung mit nur **einer** Unbekannten.

Dualvariablen bestimmen

Aus den vier Basisvariablen und $u_1 := 0$:

$$30 = u_1 + v_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v_2 = 30 - 0 = 30}$$

$$110 = u_1 + v_3$$

$$80 = u_2 + v_1$$

$$100 = u_2 + v_3$$

$u_1 = 0$ ist bekannt: Zelle (1,2) liefert v_2 .

Dualvariablen bestimmen

Aus den vier Basisvariablen und $u_1 := 0$:

$$30 = u_1 + v_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = 30 - 0 = 30$$

$$110 = u_1 + v_3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v_3 = 110 - 0 = 110}$$

$$80 = u_2 + v_1$$

$$100 = u_2 + v_3$$

Ebenso liefert Zelle (1,3) den Wert v_3 .

Dualvariablen bestimmen

Aus den vier Basisvariablen und $u_1 := 0$:

$$30 = u_1 + v_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = 30 - 0 = 30$$

$$110 = u_1 + v_3 \quad \Rightarrow \quad v_3 = 110 - 0 = 110$$

$$80 = u_2 + v_1$$

$$100 = u_2 + v_3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u_2 = 100 - 110 = -10}$$

Mit v_3 liefert Zelle (2,3) den Wert u_2 .

Dualvariablen bestimmen

Aus den vier Basisvariablen und $u_1 := 0$:

$$30 = u_1 + v_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = 30 - 0 = 30$$

$$110 = u_1 + v_3 \quad \Rightarrow \quad v_3 = 110 - 0 = 110$$

$$80 = u_2 + v_1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v_1 = 80 - (-10) = 90}$$

$$100 = u_2 + v_3 \quad \Rightarrow \quad u_2 = 100 - 110 = -10$$

Mit u_2 liefert Zelle (2, 1) zuletzt v_1 . Ergebnis: $u = (0, -10)$,
 $v = (90, 30, 110)$.

Optimalitätsprüfung

Reduzierte Kosten der Nichtbasisvariablen:

$$\begin{aligned}\bar{c}_{1,1} &= 150 - 0 - 90 = 60 > 0 \\ \bar{c}_{2,2} &= 140 + 10 - 30 = 120 > 0\end{aligned}$$

Optimalitätsprüfung

Reduzierte Kosten der **Nichtbasisvariablen**:

$$\begin{aligned}\bar{c}_{1,1} &= 150 - 0 - 90 = 60 > 0 \\ \bar{c}_{2,2} &= 140 + 10 - 30 = 120 > 0\end{aligned}$$

Grafisch ist $\bar{c}_{1,1}$ der **Umweg über den Kreis**

$(H, S) \rightarrow (H, D) \rightarrow (R, D) \rightarrow (R, S): 150 - 110 + 100 - 80 = 60.$

Optimalitätsprüfung

Reduzierte Kosten der **Nichtbasisvariablen**:

$$\begin{aligned}\bar{c}_{1,1} &= 150 - 0 - 90 = 60 > 0 \\ \bar{c}_{2,2} &= 140 + 10 - 30 = 120 > 0\end{aligned}$$

Grafisch ist $\bar{c}_{1,1}$ der **Umweg über den Kreis**

$(H, S) \rightarrow (H, D) \rightarrow (R, D) \rightarrow (R, S)$: $150 - 110 + 100 - 80 = 60$.

Alle $\bar{c}_{ij} \geq 0 \Rightarrow$ die **Startlösung ist bereits optimal**. Wäre ein $\bar{c}_{ij} < 0$, würde man X_{ij} entlang des Kreises in die Basis bringen, wie im nächsten Beispiel.

Umverteilung

Angebot $\neq$ Nachfrage

Drei Standorte, vier Zentren. Das Angebot **übersteigt** die Nachfrage:

$$\sum a_i = 160 > \sum b_j = 140$$

Angebot $\neq$ Nachfrage

Drei Standorte, vier Zentren. Das Angebot **übersteigt** die Nachfrage:

$$\sum a_i = 160 > \sum b_j = 140$$

Ausgleich durch einen **fiktiven Nachfrager** $j = 5$ mit $b_5 = 20$ und Kosten $c_{i5} = 0$:

c_{ij}	1	2	3	4	5	a_i
1	110	150	160	130	0	50
2	130	140	180	120	0	60
3	140	100	110	160	0	50
b_j	30	40	20	50	20	

Die Startlösung

Der Distributionsleiter plant bisher so (Basiszellen mit Mengen, $3 + 5 - 1 = 7$ Stück):

X_{ij}	1	2	3	4	5	a_i
1	30	–	10	–	10	50
2	–	–	–	50	10	60
3	–	40	10	–	–	50
b_j	30	40	20	50	20	

Die Startlösung

Der Distributionsleiter plant bisher so (Basiszellen mit Mengen, $3 + 5 - 1 = 7$ Stück):

X_{ij}	1	2	3	4	5	a_i
1	30	–	10	–	10	50
2	–	–	–	50	10	60
3	–	40	10	–	–	50
b_j	30	40	20	50	20	

Kosten dieses Plans:

$$30 \cdot 110 + 10 \cdot 160 + 50 \cdot 120 + 40 \cdot 100 + 10 \cdot 110 = 16\,000.$$

Frage: Geht es günstiger?

Dualvariablen der Startlösung

Sieben Basiszellen, je $c_{ij} = u_i + v_j$, Normierung $u_1 := 0$:

$$110 = u_1 + v_1$$

$$160 = u_1 + v_3$$

$$0 = u_1 + v_5$$

$$120 = u_2 + v_4$$

$$0 = u_2 + v_5$$

$$100 = u_3 + v_2$$

$$110 = u_3 + v_3$$

Gesucht: jeweils eine Gleichung mit nur **einer** Unbekannten.

Dualvariablen der Startlösung

Sieben Basiszellen, je $c_{ij} = u_i + v_j$, Normierung $u_1 := 0$:

$$110 = u_1 + v_1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v_1 = 110 - 0 = 110}$$

$$160 = u_1 + v_3$$

$$0 = u_1 + v_5$$

$$120 = u_2 + v_4$$

$$0 = u_2 + v_5$$

$$100 = u_3 + v_2$$

$$110 = u_3 + v_3$$

$u_1 = 0$ ist bekannt: Zelle (1, 1) liefert v_1 .

Dualvariablen der Startlösung

Sieben Basiszellen, je $c_{ij} = u_i + v_j$, Normierung $u_1 := 0$:

$$110 = u_1 + v_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 110 - 0 = 110$$

$$160 = u_1 + v_3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v_3 = 160 - 0 = 160}$$

$$0 = u_1 + v_5$$

$$120 = u_2 + v_4$$

$$0 = u_2 + v_5$$

$$100 = u_3 + v_2$$

$$110 = u_3 + v_3$$

Ebenso liefert Zelle (1,3) den Wert v_3 .

Dualvariablen der Startlösung

Sieben Basiszellen, je $c_{ij} = u_i + v_j$, Normierung $u_1 := 0$:

$$110 = u_1 + v_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 110 - 0 = 110$$

$$160 = u_1 + v_3 \quad \Rightarrow \quad v_3 = 160 - 0 = 160$$

$$0 = u_1 + v_5 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v_5 = 0 - 0 = 0}$$

$$120 = u_2 + v_4$$

$$0 = u_2 + v_5$$

$$100 = u_3 + v_2$$

$$110 = u_3 + v_3$$

Ebenso liefert Zelle (1,5) den Wert v_5 .

Dualvariablen der Startlösung

Sieben Basiszellen, je $c_{ij} = u_i + v_j$, Normierung $u_1 := 0$:

$$110 = u_1 + v_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 110 - 0 = 110$$

$$160 = u_1 + v_3 \quad \Rightarrow \quad v_3 = 160 - 0 = 160$$

$$0 = u_1 + v_5 \quad \Rightarrow \quad v_5 = 0 - 0 = 0$$

$$120 = u_2 + v_4$$

$$0 = u_2 + v_5 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u_2 = 0 - 0 = 0}$$

$$100 = u_3 + v_2$$

$$110 = u_3 + v_3$$

Mit v_5 liefert Zelle (2,5) den Wert u_2 .

Dualvariablen der Startlösung

Sieben Basiszellen, je $c_{ij} = u_i + v_j$, Normierung $u_1 := 0$:

$$110 = u_1 + v_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 110 - 0 = 110$$

$$160 = u_1 + v_3 \quad \Rightarrow \quad v_3 = 160 - 0 = 160$$

$$0 = u_1 + v_5 \quad \Rightarrow \quad v_5 = 0 - 0 = 0$$

$$120 = u_2 + v_4 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v_4 = 120 - 0 = 120}$$

$$0 = u_2 + v_5 \quad \Rightarrow \quad u_2 = 0 - 0 = 0$$

$$100 = u_3 + v_2$$

$$110 = u_3 + v_3$$

Mit u_2 liefert Zelle (2,4) den Wert v_4 .

Dualvariablen der Startlösung

Sieben Basiszellen, je $c_{ij} = u_i + v_j$, Normierung $u_1 := 0$:

$$110 = u_1 + v_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 110 - 0 = 110$$

$$160 = u_1 + v_3 \quad \Rightarrow \quad v_3 = 160 - 0 = 160$$

$$0 = u_1 + v_5 \quad \Rightarrow \quad v_5 = 0 - 0 = 0$$

$$120 = u_2 + v_4 \quad \Rightarrow \quad v_4 = 120 - 0 = 120$$

$$0 = u_2 + v_5 \quad \Rightarrow \quad u_2 = 0 - 0 = 0$$

$$100 = u_3 + v_2$$

$$110 = u_3 + v_3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u_3 = 110 - 160 = -50}$$

Mit v_3 liefert Zelle (3,3) den Wert u_3 .

Dualvariablen der Startlösung

Sieben Basiszellen, je $c_{ij} = u_i + v_j$, Normierung $u_1 := 0$:

$$\begin{aligned} 110 &= u_1 + v_1 &\Rightarrow v_1 &= 110 - 0 = 110 \\ 160 &= u_1 + v_3 &\Rightarrow v_3 &= 160 - 0 = 160 \\ 0 &= u_1 + v_5 &\Rightarrow v_5 &= 0 - 0 = 0 \\ 120 &= u_2 + v_4 &\Rightarrow v_4 &= 120 - 0 = 120 \\ 0 &= u_2 + v_5 &\Rightarrow u_2 &= 0 - 0 = 0 \\ 100 &= u_3 + v_2 &\Rightarrow \mathbf{v_2} &= \mathbf{100 - (-50) = 150} \\ 110 &= u_3 + v_3 &\Rightarrow u_3 &= 110 - 160 = -50 \end{aligned}$$

Mit u_3 liefert Zelle (3, 2) zuletzt v_2 . Ergebnis: $u = (0, 0, -50)$,
 $v = (110, 150, 160, 120, 0)$.

Startlösung nicht optimal

$\bar{c}_{ij}$	1	2	3	4	5	u_i
1	[30]		[10]		[10]	0
2				[50]	[10]	0
3		[40]	[10]			-50
v_j	110	150	160	120	0	

[·]: Basiszelle mit Menge. Für jede Nichtbasiszelle gilt
 $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$.

Startlösung nicht optimal

$\bar{c}_{ij}$	1	2	3	4	5	u_i
1	[30]	(0)	[10]		[10]	0
2				[50]	[10]	0
3		[40]	[10]			-50
v_j	110	150	160	120	0	

$$\bar{c}_{1,2} = 150 - 0 - 150 = 0.$$

Startlösung nicht optimal

$\bar{c}_{ij}$	1	2	3	4	5	u_i
1	[30]	(0)	[10]	(10)	[10]	0
2				[50]	[10]	0
3		[40]	[10]			-50
v_j	110	150	160	120	0	

$$\bar{c}_{1,4} = 130 - 0 - 120 = 10 > 0.$$

Startlösung nicht optimal

$\bar{c}_{ij}$	1	2	3	4	5	u_i
1	[30]	(0)	[10]	(10)	[10]	0
2	(20)			[50]	[10]	0
3		[40]	[10]			-50
v_j	110	150	160	120	0	

$$\bar{c}_{2,1} = 130 - 0 - 110 = 20 > 0.$$

Startlösung nicht optimal

$\bar{c}_{ij}$	1	2	3	4	5	u_i
1	[30]	(0)	[10]	(10)	[10]	0
2	(20)	(-10)		[50]	[10]	0
3		[40]	[10]			-50
v_j	110	150	160	120	0	

$$\bar{c}_{2,2} = 140 - 0 - 150 = -10 < 0.$$

Startlösung nicht optimal

$\bar{c}_{ij}$	1	2	3	4	5	u_i
1	[30]	(0)	[10]	(10)	[10]	0
2	(20)	(-10)	(20)	[50]	[10]	0
3		[40]	[10]			-50
v_j	110	150	160	120	0	

$$\bar{c}_{2,3} = 180 - 0 - 160 = 20 > 0.$$

Startlösung nicht optimal

$\bar{c}_{ij}$	1	2	3	4	5	u_i
1	[30]	(0)	[10]	(10)	[10]	0
2	(20)	(-10)	(20)	[50]	[10]	0
3	(80)	[40]	[10]			-50
v_j	110	150	160	120	0	

$$\bar{c}_{3,1} = 140 + 50 - 110 = 80 > 0.$$

Startlösung nicht optimal

$\bar{c}_{ij}$	1	2	3	4	5	u_i
1	[30]	(0)	[10]	(10)	[10]	0
2	(20)	(-10)	(20)	[50]	[10]	0
3	(80)	[40]	[10]	(90)		-50
v_j	110	150	160	120	0	

$$\bar{c}_{3,4} = 160 + 50 - 120 = 90 > 0.$$

Startlösung nicht optimal

$\bar{c}_{ij}$	1	2	3	4	5	u_i
1	[30]	(0)	[10]	(10)	[10]	0
2	(20)	(-10)	(20)	[50]	[10]	0
3	(80)	[40]	[10]	(90)	(50)	-50
v_j	110	150	160	120	0	

$$\bar{c}_{3,5} = 0 + 50 - 0 = 50 > 0.$$

Startlösung nicht optimal

$\bar{c}_{ij}$	1	2	3	4	5	u_i
1	[30]	(0)	[10]	(10)	[10]	0
2	(20)	(-10)	(20)	[50]	[10]	0
3	(80)	[40]	[10]	(90)	(50)	-50
v_j	110	150	160	120	0	

Nur $\bar{c}_{2,2} = -10 < 0$: $X_{2,2}$ in die Basis aufnehmen, entlang eines **Umverteilungskreises** durch die Basiszellen.

Der Umverteilungskreis

X_{ij}	1	2	3	4	5	a_i
1	30	–	10	–	10	50
2	–	$+\Delta$	–	50	10	60
3	–	40	10	–	–	50
b_j	30	40	20	50	20	

$X_{2,2}$ aufnehmen und um Δ erhöhen: Spalte 2 hat nun Δ zu viel.

Der Umverteilungskreis

X_{ij}	1	2	3	4	5	a_i
1	30	–	10	–	10	50
2	–	$+\Delta$	–	50	10	60
3	–	$40 - \Delta$	10	–	–	50
b_j	30	40	20	50	20	

Spalte 2 ausgleichen: Dort ist $X_{3,2}$ die einzige Basiszelle, also $40 - \Delta$.

Der Umverteilungskreis

X_{ij}	1	2	3	4	5	a_i
1	30	–	10	–	10	50
2	–	$+\Delta$	–	50	10	60
3	–	$40 - \Delta$	$10 + \Delta$	–	–	50
b_j	30	40	20	50	20	

Zeile 3 ausgleichen: $X_{3,3} = 10 + \Delta$.

Der Umverteilungskreis

X_{ij}	1	2	3	4	5	a_i
1	30	–	10 $-\Delta$	–	10	50
2	–	$+\Delta$	–	50	10	60
3	–	40 $-\Delta$	10 $+\Delta$	–	–	50
b_j	30	40	20	50	20	

Spalte 3 ausgleichen: $X_{1,3} = 10 - \Delta$.

Der Umverteilungskreis

X_{ij}	1	2	3	4	5	a_i
1	30	–	10 $-\Delta$	–	10 $+\Delta$	50
2	–	$+\Delta$	–	50	10	60
3	–	40 $-\Delta$	10 $+\Delta$	–	–	50
b_j	30	40	20	50	20	

Zeile 1 ausgleichen über $X_{1,5} = 10 + \Delta$. $X_{1,1}$ scheidet aus: Spalte 1 hat keine zweite Basiszelle.

Der Umverteilungskreis

X_{ij}	1	2	3	4	5	a_i
1	30	–	10 $-\Delta$	–	10 $+\Delta$	50
2	–	$+\Delta$	–	50	10 $-\Delta$	60
3	–	40 $-\Delta$	10 $+\Delta$	–	–	50
b_j	30	40	20	50	20	

Spalte 5 ausgleichen: $X_{2,5} = 10 - \Delta$. Damit stimmt auch Zeile 2, der Kreis ist **geschlossen**. Alle Summen bleiben erhalten.

Der Umverteilungskreis

X_{ij}	1	2	3	4	5	a_i
1	30	–	10 –Δ	–	10 + Δ	50
2	–	+ Δ	–	50	10 –Δ	60
3	–	40 –Δ	10 + Δ	–	–	50
b_j	30	40	20	50	20	

Die $-\Delta$ -Zellen dürfen nicht negativ werden: $\Delta = \min\{10, 10, 40\} = 10$

.

Der Umverteilungskreis

X_{ij}	1	2	3	4	5	a_i
1	30	–	0	–	20	50
2	–	10	–	50	0	60
3	–	30	20	–	–	50
b_j	30	40	20	50	20	

Mit $\Delta = 10$ werden $X_{1,3}$ und $X_{2,5}$ null. Ersparnis:
 $\Delta \cdot |\bar{c}_{2,2}| = 10 \cdot 10 = 100.$

Neue Basis

Nach der Umverteilung, wieder sieben Basiszellen:

Zelle	$X_{1,1}$	$X_{2,2}$	$X_{2,4}$	$X_{3,2}$	$X_{3,3}$	$X_{1,5}$	$X_{2,5}$
Menge	30	10	50	30	20	20	0

Neue Basis

Nach der Umverteilung, wieder sieben Basiszellen:

Zelle	$X_{1,1}$	$X_{2,2}$	$X_{2,4}$	$X_{3,2}$	$X_{3,3}$	$X_{1,5}$	$X_{2,5}$
Menge	30	10	50	30	20	20	0

Zwei $-\Delta$ -Zellen wurden gleichzeitig null, nur **eine** verlässt die Basis, hier $X_{1,3} \cdot X_{2,5} = 0$ bleibt als **degenerierte** Basisvariable (primale Degeneration, Vorlesung 5!).

Neue Dualvariablen

Neue Basiszellen, wieder $u_1 := 0$:

$$110 = u_1 + v_1$$

$$0 = u_1 + v_5$$

$$140 = u_2 + v_2$$

$$120 = u_2 + v_4$$

$$0 = u_2 + v_5$$

$$100 = u_3 + v_2$$

$$110 = u_3 + v_3$$

Gesucht: jeweils eine Gleichung mit nur **einer** Unbekannten.

Neue Dualvariablen

Neue Basiszellen, wieder $u_1 := 0$:

$$110 = u_1 + v_1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v_1 = 110 - 0 = 110}$$

$$0 = u_1 + v_5$$

$$140 = u_2 + v_2$$

$$120 = u_2 + v_4$$

$$0 = u_2 + v_5$$

$$100 = u_3 + v_2$$

$$110 = u_3 + v_3$$

$u_1 = 0$ ist bekannt: Zelle (1, 1) liefert v_1 .

Neue Dualvariablen

Neue Basiszellen, wieder $u_1 := 0$:

$$110 = u_1 + v_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 110 - 0 = 110$$

$$0 = u_1 + v_5 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v_5 = 0 - 0 = 0}$$

$$140 = u_2 + v_2$$

$$120 = u_2 + v_4$$

$$0 = u_2 + v_5$$

$$100 = u_3 + v_2$$

$$110 = u_3 + v_3$$

Ebenso liefert Zelle (1,5) den Wert v_5 .

Neue Dualvariablen

Neue Basiszellen, wieder $u_1 := 0$:

$$110 = u_1 + v_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 110 - 0 = 110$$

$$0 = u_1 + v_5 \quad \Rightarrow \quad v_5 = 0 - 0 = 0$$

$$140 = u_2 + v_2$$

$$120 = u_2 + v_4$$

$$0 = u_2 + v_5 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u_2 = 0 - 0 = 0}$$

$$100 = u_3 + v_2$$

$$110 = u_3 + v_3$$

Mit v_5 liefert die degenerierte Zelle (2,5) den Wert u_2 . Ohne sie bliebe u_2 offen.

Neue Dualvariablen

Neue Basiszellen, wieder $u_1 := 0$:

$$110 = u_1 + v_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 110 - 0 = 110$$

$$0 = u_1 + v_5 \quad \Rightarrow \quad v_5 = 0 - 0 = 0$$

$$140 = u_2 + v_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v_2 = 140 - 0 = 140}$$

$$120 = u_2 + v_4$$

$$0 = u_2 + v_5 \quad \Rightarrow \quad u_2 = 0 - 0 = 0$$

$$100 = u_3 + v_2$$

$$110 = u_3 + v_3$$

Mit u_2 liefert Zelle (2,2) den Wert v_2 .

Neue Dualvariablen

Neue Basiszellen, wieder $u_1 := 0$:

$$110 = u_1 + v_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 110 - 0 = 110$$

$$0 = u_1 + v_5 \quad \Rightarrow \quad v_5 = 0 - 0 = 0$$

$$140 = u_2 + v_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = 140 - 0 = 140$$

$$120 = u_2 + v_4 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v_4 = 120 - 0 = 120}$$

$$0 = u_2 + v_5 \quad \Rightarrow \quad u_2 = 0 - 0 = 0$$

$$100 = u_3 + v_2$$

$$110 = u_3 + v_3$$

Ebenso liefert Zelle (2,4) den Wert v_4 .

Neue Dualvariablen

Neue Basiszellen, wieder $u_1 := 0$:

$$110 = u_1 + v_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 110 - 0 = 110$$

$$0 = u_1 + v_5 \quad \Rightarrow \quad v_5 = 0 - 0 = 0$$

$$140 = u_2 + v_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = 140 - 0 = 140$$

$$120 = u_2 + v_4 \quad \Rightarrow \quad v_4 = 120 - 0 = 120$$

$$0 = u_2 + v_5 \quad \Rightarrow \quad u_2 = 0 - 0 = 0$$

$$100 = u_3 + v_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u_3 = 100 - 140 = -40}$$

$$110 = u_3 + v_3$$

Mit v_2 liefert Zelle (3,2) den Wert u_3 .

Neue Dualvariablen

Neue Basiszellen, wieder $u_1 := 0$:

$$\begin{aligned} 110 &= u_1 + v_1 &\Rightarrow v_1 &= 110 - 0 = 110 \\ 0 &= u_1 + v_5 &\Rightarrow v_5 &= 0 - 0 = 0 \\ 140 &= u_2 + v_2 &\Rightarrow v_2 &= 140 - 0 = 140 \\ 120 &= u_2 + v_4 &\Rightarrow v_4 &= 120 - 0 = 120 \\ 0 &= u_2 + v_5 &\Rightarrow u_2 &= 0 - 0 = 0 \\ 100 &= u_3 + v_2 &\Rightarrow u_3 &= 100 - 140 = -40 \\ 110 &= u_3 + v_3 &\Rightarrow \mathbf{v_3} &= \mathbf{110 - (-40) = 150} \end{aligned}$$

Mit u_3 liefert Zelle (3,3) zuletzt v_3 . Ergebnis: $u = (0, 0, -40)$,
 $v = (110, 140, 150, 120, 0)$.

Optimale Lösung

$\bar{c}_{ij}$	1	2	3	4	5	u_i
1	[30]				[20]	0
2		[10]		[50]	[0]	0
3		[30]	[20]			-40
v_j	110	140	150	120	0	

[·]: Basiszelle mit Menge, auch die degenerierte [0]. Für jede Nichtbasiszelle gilt $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$.

Optimale Lösung

$\bar{c}_{ij}$	1	2	3	4	5	u_i
1	[30]	(10)			[20]	0
2		[10]		[50]	[0]	0
3		[30]	[20]			-40
v_j	110	140	150	120	0	

$$\bar{c}_{1,2} = 150 - 0 - 140 = 10 > 0.$$

Optimale Lösung

$\bar{c}_{ij}$	1	2	3	4	5	u_i
1	[30]	(10)	(10)		[20]	0
2		[10]		[50]	[0]	0
3		[30]	[20]			-40
v_j	110	140	150	120	0	

$$\bar{c}_{1,3} = 160 - 0 - 150 = 10 > 0.$$

Optimale Lösung

$\bar{c}_{ij}$	1	2	3	4	5	u_i
1	[30]	(10)	(10)	(10)	[20]	0
2		[10]		[50]	[0]	0
3		[30]	[20]			-40
v_j	110	140	150	120	0	

$$\bar{c}_{1,4} = 130 - 0 - 120 = 10 > 0.$$

Optimale Lösung

$\bar{c}_{ij}$	1	2	3	4	5	u_i
1	[30]	(10)	(10)	(10)	[20]	0
2	(20)	[10]		[50]	[0]	0
3		[30]	[20]			-40
v_j	110	140	150	120	0	

$$\bar{c}_{2,1} = 130 - 0 - 110 = 20 > 0.$$

Optimale Lösung

$\bar{c}_{ij}$	1	2	3	4	5	u_i
1	[30]	(10)	(10)	(10)	[20]	0
2	(20)	[10]	(30)	[50]	[0]	0
3		[30]	[20]			-40
v_j	110	140	150	120	0	

$$\bar{c}_{2,3} = 180 - 0 - 150 = 30 > 0.$$

Optimale Lösung

$\bar{c}_{ij}$	1	2	3	4	5	u_i
1	[30]	(10)	(10)	(10)	[20]	0
2	(20)	[10]	(30)	[50]	[0]	0
3	(70)	[30]	[20]			-40
v_j	110	140	150	120	0	

$$\bar{c}_{3,1} = 140 + 40 - 110 = 70 > 0.$$

Optimale Lösung

$\bar{c}_{ij}$	1	2	3	4	5	u_i
1	[30]	(10)	(10)	(10)	[20]	0
2	(20)	[10]	(30)	[50]	[0]	0
3	(70)	[30]	[20]	(80)		-40
v_j	110	140	150	120	0	

$$\bar{c}_{3,4} = 160 + 40 - 120 = 80 > 0.$$

Optimale Lösung

$\bar{c}_{ij}$	1	2	3	4	5	u_i
1	[30]	(10)	(10)	(10)	[20]	0
2	(20)	[10]	(30)	[50]	[0]	0
3	(70)	[30]	[20]	(80)	(40)	-40
v_j	110	140	150	120	0	

$$\bar{c}_{3,5} = 0 + 40 - 0 = 40 > 0.$$

Optimale Lösung

$\bar{c}_{ij}$	1	2	3	4	5	u_i
1	[30]	(10)	(10)	(10)	[20]	0
2	(20)	[10]	(30)	[50]	[0]	0
3	(70)	[30]	[20]	(80)	(40)	-40
v_j	110	140	150	120	0	

Alle $\bar{c}_{ij} \geq 0$: **optimal**, $F^* = 16\,000 - 100 = 15\,900$. $X_{1,5} + X_{2,5} = 20$ bleibt beim fiktiven Nachfrager.

Kontrolle mit Julia

Reifentransport mit JuMP

```
1 using JuMP, HiGHS
2
3 a = [15, 15]           # Angebot: Hannover, Regensburg
4 b = [13, 11, 6]        # Nachfrage: Stuttgart, Wolfsburg, Dresden
5 c = [150 30 110; 80 140 100] # Transportkosten c[i,j]
6
7 modell = Model(HiGHS.Optimizer); set_silent(modell)
8 @variable(modell, X[1:2, 1:3] >= 0)
9 @objective(modell, Min, sum(c[i,j] * X[i,j] for i in 1:2, j in 1:3))
10 @constraint(modell, [i in 1:2],           # Angebot
11              sum(X[i,j] for j in 1:3) == a[i])
12 @constraint(modell, [j in 1:3],           # Nachfrage
13              sum(X[i,j] for i in 1:2) == b[j])
14
15 optimize!(modell)
16 println("F* = ", objective_value(modell))
```

Reifentransport mit JuMP

```
1 using JuMP, HiGHS
2
3 a = [15, 15]           # Angebot: Hannover, Regensburg
4 b = [13, 11, 6]        # Nachfrage: Stuttgart, Wolfsburg, Dresden
5 c = [150 30 110; 80 140 100] # Transportkosten c[i,j]
6
7 modell = Model(HiGHS.Optimizer); set_silent(modell)
8 @variable(modell, X[1:2, 1:3] >= 0)
9 @objective(modell, Min, sum(c[i,j] * X[i,j] for i in 1:2, j in 1:3))
10 @constraint(modell, [i in 1:2],           # Angebot
11             sum(X[i,j] for j in 1:3) == a[i])
12 @constraint(modell, [j in 1:3],           # Nachfrage
13             sum(X[i,j] for i in 1:2) == b[j])
14
15 optimize!(modell)
16 println("F* = ", objective_value(modell))
```

F* = 2010.0

Distribution mit JuMP

Angebot als $\leq$ (Überschuss bleibt liegen), Nachfrage als $=$:

```
1 a = [50, 60, 50]; b = [30, 40, 20, 50]
2 c = [110 150 160 130; 130 140 180 120; 140 100 110 160]
3
4 modell = Model(HiGHS.Optimizer); set_silent(modell)
5 @variable(modell, X[1:3, 1:4] >= 0)
6 @objective(modell, Min, sum(c[i,j]*X[i,j] for i in 1:3, j in 1:4))
7 @constraint(modell, [i in 1:3], # Angebot
8     sum(X[i,j] for j in 1:4) <= a[i])
9 @constraint(modell, [j in 1:4], # Nachfrage
10     sum(X[i,j] for i in 1:3) == b[j])
11
12 optimize!(modell)
13 println("F* = ", round{Int, objective_value(modell)})
```

Distribution mit JuMP

Angebot als $\leq$ (Überschuss bleibt liegen), Nachfrage als $=$:

```
1 a = [50, 60, 50]; b = [30, 40, 20, 50]
2 c = [110 150 160 130; 130 140 180 120; 140 100 110 160]
3
4 modell = Model(HiGHS.Optimizer); set_silent(modell)
5 @variable(modell, X[1:3, 1:4] >= 0)
6 @objective(modell, Min, sum(c[i,j]*X[i,j] for i in 1:3, j in 1:4))
7 @constraint(modell, [i in 1:3], # Angebot
8             sum(X[i,j] for j in 1:4) <= a[i])
9 @constraint(modell, [j in 1:4], # Nachfrage
10            sum(X[i,j] for i in 1:3) == b[j])
11
12 optimize!(modell)
13 println("F* = ", round{Int, objective_value(modell)})
```

F* = 15900

Zusammenfassung

Das Wichtigste auf einen Blick

Das Wichtigste auf einen Blick

- Der **Kruskal-Algorithmus** liefert den minimalen spannenden Baum (kreisfreies, kostenminimales Netz).

Das Wichtigste auf einen Blick

- Der **Kruskal-Algorithmus** liefert den minimalen spannenden Baum (kreisfreies, kostenminimales Netz).
- Das **Transportproblem** verteilt Angebot auf Nachfrage bei minimalen Kosten: eine Restriktion ist redundant.

Das Wichtigste auf einen Blick

- Der **Kruskal-Algorithmus** liefert den minimalen spannenden Baum (kreisfreies, kostenminimales Netz).
- Das **Transportproblem** verteilt Angebot auf Nachfrage bei minimalen Kosten: eine Restriktion ist redundant.
- Die **Vogelsche Approximationsmethode** erzeugt schnell eine gute Startlösung.

Das Wichtigste auf einen Blick

- Der **Kruskal-Algorithmus** liefert den minimalen spannenden Baum (kreisfreies, kostenminimales Netz).
- Das **Transportproblem** verteilt Angebot auf Nachfrage bei minimalen Kosten: eine Restriktion ist redundant.
- Die **Vogelsche Approximationsmethode** erzeugt schnell eine gute Startlösung.
- Die **MODI-Methode** prüft und verbessert sie über reduzierte Kosten $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$.

Literatur

Literaturverzeichnis

Domschke, Wolfgang, Andreas Drexl, Robert Klein, und Armin Scholl. 2015. *Einführung in Operations Research*. 9. Aufl. Springer Gabler. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-48216-2>.