

Vorlesung 05: Sonderfälle

Grundlagen Operations Research

Sonderfälle

Wenn der Plan nicht aufgeht

K. Haase u. a. [1]

Vier Sonderfälle

Bisher fand der Simplex stets **genau eine** optimale Lösung. Das ist nicht selbstverständlich:

- **Mehrdeutige** Lösung: mehrere Optima.
- **Degenerierte** Basislösung: Gefahr des Kreisens.
- **Keine zulässige** Lösung: leerer Lösungsraum.
- **Unbeschränktes** Problem: $F \rightarrow \infty$.

Idee

Der Simplex **meldet** jeden Sonderfall selbst. Man muss nur wissen, wo man hinschaut: F -Zeile, b -Spalte oder Pivotspalte.

Mehrdeutige Lösung

Ein einfaches Beispiel

$$\begin{aligned}\max F &= X_1 + X_2 \\ X_1 + X_2 &\leq 4 \\ X_1 &\leq 2 \\ X_1, X_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Frage: **Was fällt Ihnen an Zielfunktion und erster Restriktion auf?**

Die Zielfunktion verläuft **parallel** zur ersten Nebenbedingung, das führt zu einer Besonderheit.

Zwei optimale Basislösungen

Im Optimaltableau sind die reduzierten Kosten der **Nichtbasisvariablen** Y_2 null, ein Basistausch kostet nichts:

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	b
X_2	0	1	1	-1	2

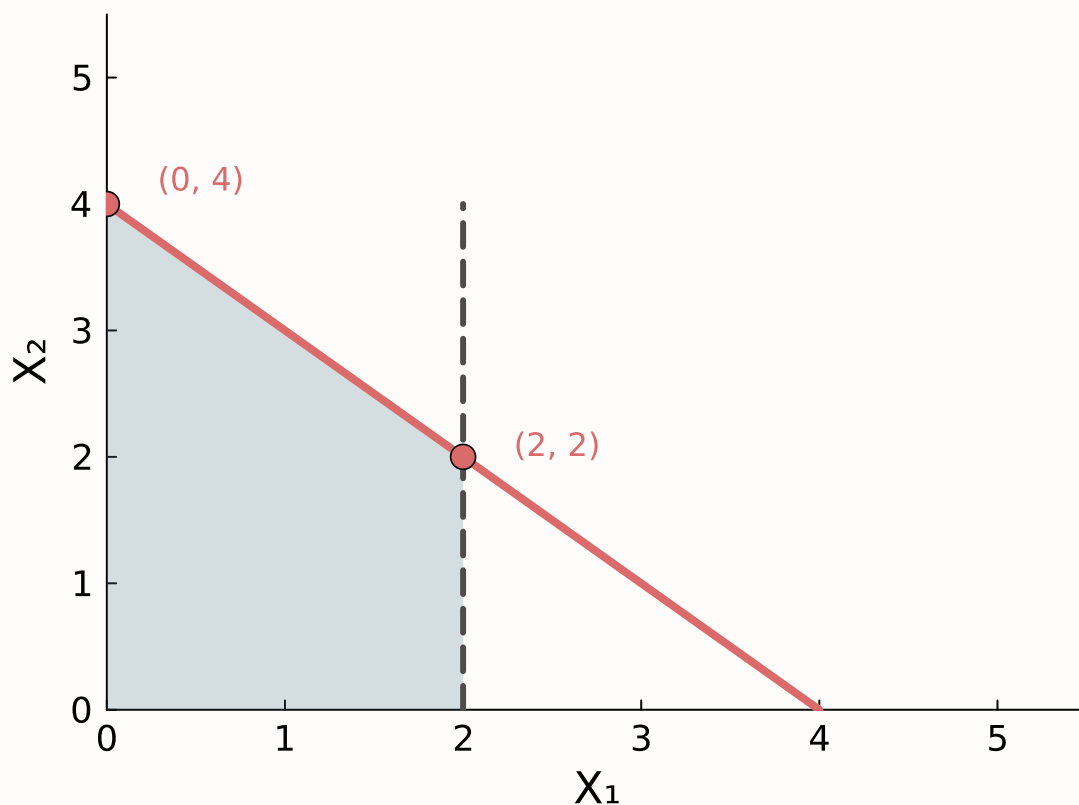
BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	b
X_1	1	0	0	1	2
F	0	0	1	0	4

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	b
X_2	1	1	1	0	4
Y_2	1	0	0	1	2
F	0	0	1	0	4

Optimal: $X_1^* = 2$, $X_2^* = 2$, $F^* = 4$. Der Multiplikator von Y_2 ist **null** $\Rightarrow$ **duale Degeneration**.

Nach dem Basistausch (Y_2 für X_1): $X_2^* = 4$, $F^* = 4$, eine **zweite** optimale Basislösung, gleicher Zielwert.

Grafische Deutung



Die Zielgerade liegt **auf** der ersten Nebenbedingung.

! Mehrere Optima

$(2, 2)$, $(0, 4)$ und **alle** Punkte dazwischen sind optimal.

Primale Degeneration

Entartete Basislösung

$$\max F = X_1 + 2X_2$$

$$X_1 + X_2 \leq 4$$

$$X_1 \leq 2$$

$$X_2 \leq 2$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

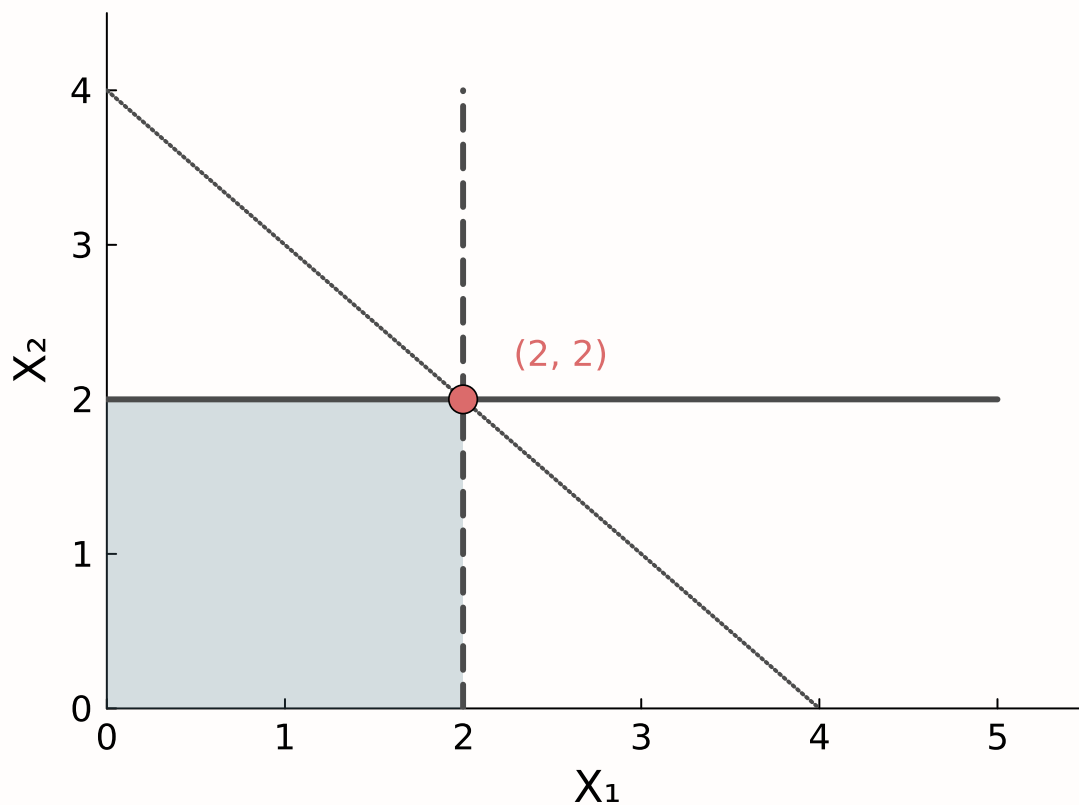
Am Optimum treffen sich **drei** Restriktionen in einem Punkt, eine Basisvariable wird null.

Eine Basisvariable wird null

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	b
X_1	1	0	1	0	-1	2
Y_2	0	0	-1	1	1	0
X_2	0	1	0	0	1	2
F	0	0	1	0	1	6

Basisvariable $Y_2 = 0$: eine **entartete** (degenerierte) Basislösung.

Grafische Deutung



Die gepunktete Restriktion ist **redundant**; sie läuft durch die optimale Ecke (2, 2).

 Gefahr des Kreisens

Der Simplex kann zwischen Basislösungen **desselben** Eckpunkts kreisen.

Keine zulässige Lösung

Widersprüchliche Vorgaben

$$\max F = X_1 + 2X_2$$

$$X_1 + X_2 \leq 4$$

$$X_1 \geq 3$$

$$X_1 \leq X_2$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Frage: **Sehen Sie den Widerspruch?**

$X_1 \geq 3$ und $X_1 \leq X_2$ erzwingen $X_1 + X_2 \geq 6 > 4$. Aber wie merkt das der **Simplex**?

Zweiphasen als Detektor

Die $\geq$ -Zeile erhält eine künstliche Variable: $X_1 - Y_2 + Z_1 = 3$, also Z -Zeile $-X_1 + Y_2 + Z = -3$.

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	Z_1	b
Y_1	1	1	1	0	0	0	4
Z_1	1	0	0	-1	0	1	3
Y_3	1	-1	0	0	1	0	0
F	-1	-2	0	0	0	0	0
Z	-1	0	0	1	0	0	-3

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	Z_1	b
Y_1	0	2	1	0	-1	0	4
Z_1	0	1	0	-1	-1	1	3
X_1	1	-1	0	0	1	0	0
F	0	-3	0	0	1	0	0
Z	0	-1	0	1	1	0	-3

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	Z_1	b
X_2	0	1	1/2	0	-1/2	0	2
Z_1	0	0	-1/2	-1	-1/2	1	1

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	Z_1	b
X_1	1	0	1/2	0	1/2	0	2
F	0	0	3/2	0	-1/2	0	6
Z	0	0	1/2	1	1/2	0	-1

Z -Zeile: -1 unter X_1 ; kleinster Quotient $0/1 \Rightarrow$ Pivot [1].

Z -Zeile: -1 unter X_2 ; Quotienten $\min\{4/2, 3/1\} = 2 \Rightarrow$ Pivot [2].

Die Z -Zeile hat **keine** negativen Einträge mehr, aber $Z_1 = 1$ bleibt in der Basis: **keine zulässige Lösung**.

Dualer Simplex als Detektor

Alternative: $X_1 \geq 3$ mit -1 multipliziert ($-X_1 + Y_2 = -3$). Die Startlösung ist unzulässig, der **duale Simplex** übernimmt.

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	b
Y_1	1	1	1	0	0	4
Y_2	-1	0	0	1	0	-3
Y_3	1	-1	0	0	1	0
F	-1	-2	0	0	0	0

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	b
Y_1	0	1	1	1	0	1
X_1	1	0	0	-1	0	3
Y_3	0	-1	0	1	1	-3
F	0	-2	0	-1	0	3

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	b
Y_1	0	0	1	2	1	-2
X_1	1	0	0	-1	0	3
X_2	0	1	0	-1	-1	3
F	0	0	0	-3	-2	9

$Y_2 = -3$ ist unzulässig; einziger negativer Koeffizient $\Rightarrow$ Pivot [-1].

Jetzt ist $Y_3 = -3$ unzulässig; wieder nur ein Kandidat $\Rightarrow$ Pivot [-1].

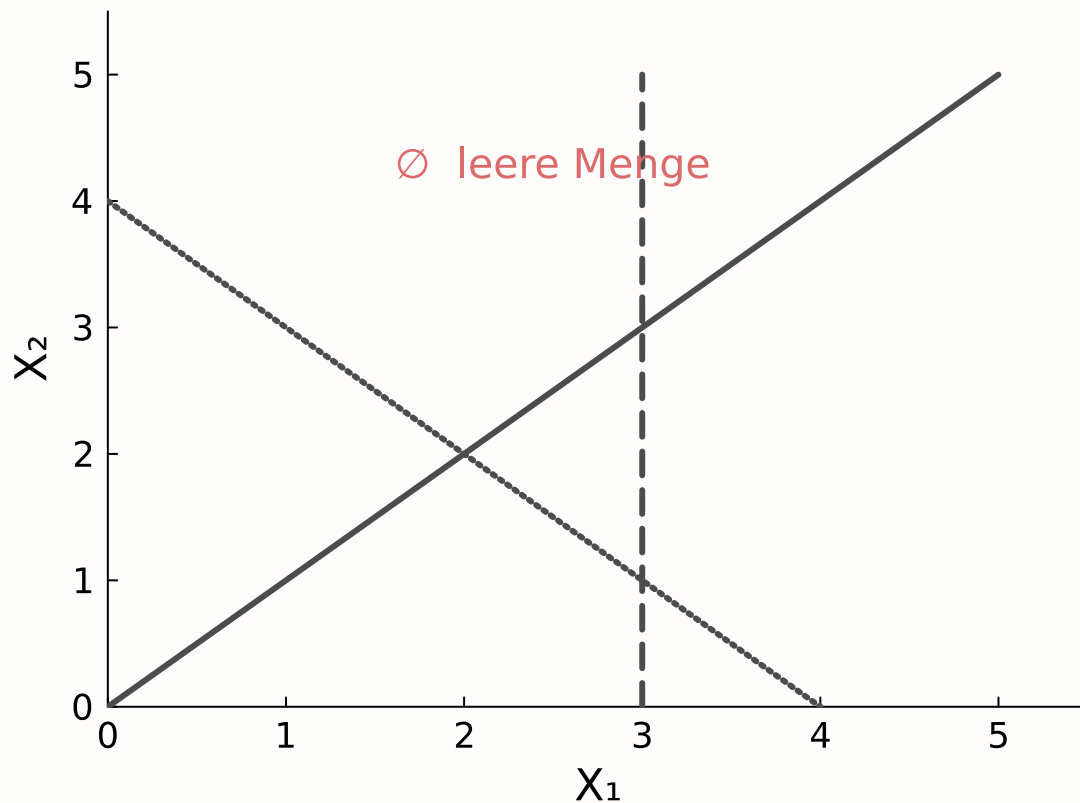
$Y_1 = -2$ ist unzulässig, aber die Zeile hat **keinen negativen** Koeffizienten, kein zulässiger Basistausch: **keine zulässige Lösung**.

Zwei Wege, ein Befund

- **Zweiphasenmethode:** Phase 1 endet mit einer künstlichen Variablen $Z_1 > 0$ in der Basis, obwohl keine Verbesserung mehr möglich ist.
- **Dualer Simplex:** für eine negative Basisvariable existiert **kein** zulässiger Basistausch.

Beides signalisiert dasselbe: der Lösungsraum ist **leer**.

Grafische Deutung



Die drei Halbräume haben **keine** gemeinsame Fläche.

! Leere Lösungsmenge

Es gibt **keine** zulässige Lösung.

Unbeschränktes Problem

Unbegrenzte Zielfunktion

$$\max F = X_1 + 2X_2$$

$$X_1 - X_2 \leq 4$$

$$X_1 + X_2 \geq 4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

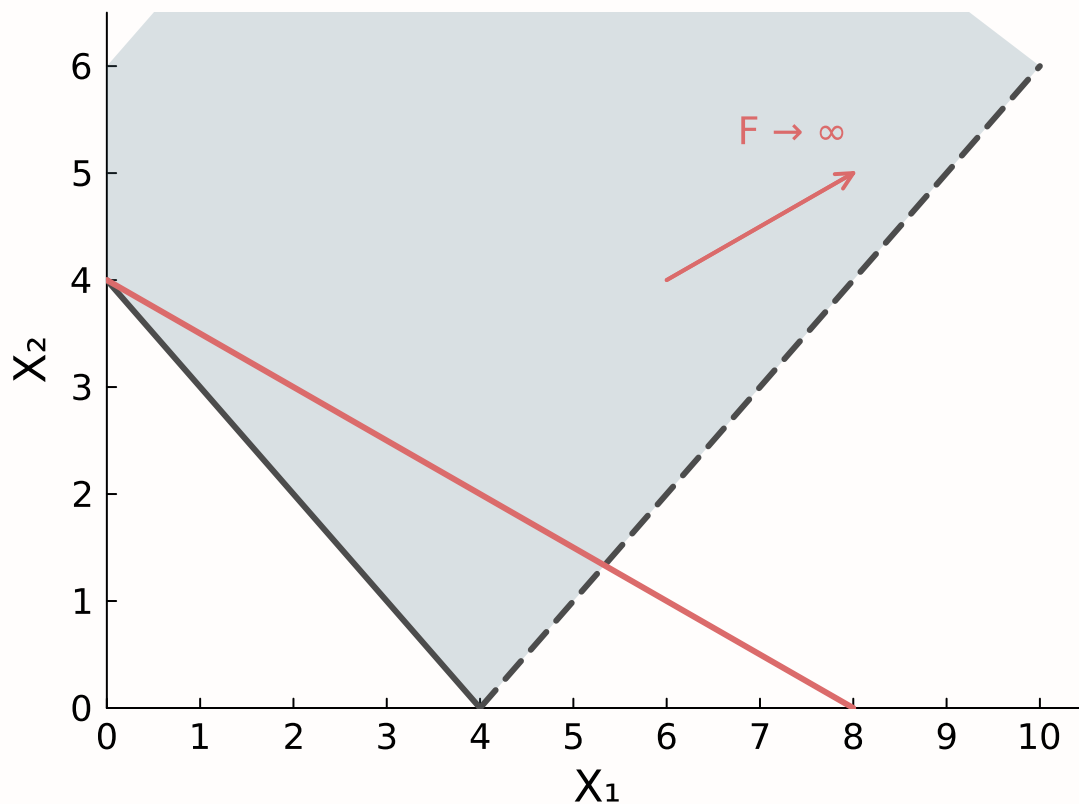
Der zulässige Bereich ist nach **oben offen**, die Zielfunktion kennt keine Schranke.

Erkennung im Simplex

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	b
Y_1	2	0	1	-1	8
X_2	1	1	0	-1	4
F	1	0	0	-2	8

Y_2 soll in die Basis, aber **alle** Koeffizienten der Pivotspalte sind ≤ 0 . Es gibt keine Schranke: F ist beliebig steigerbar.

Grafische Deutung



Die Zielgerade lässt sich **beliebig** nach rechts oben schieben.

! Keine endliche Lösung

$F \rightarrow \infty$: das Problem ist **unbeschränkt**.

Kontrolle mit Julia

Mehrdeutigkeit erkennen

Die **reduzierten Kosten** verraten die Mehrdeutigkeit: HiGHS findet die Ecke $(0, 4)$; die Nichtbasisvariable X_1 hat reduzierte Kosten **null**, ein Basistausch wäre gratis:

```

using JuMP, HiGHS

modell = Model(HiGHS.Optimizer); set_silent(modell)
@variable(modell, X1 >= 0); @variable(modell, X2 >= 0)
@objective(modell, Max, X1 + X2)
@constraint(modell, X1 + X2 <= 4)
@constraint(modell, X1 <= 2)
optimize!(modell)
println("X = (", value(X1), ", ", value(X2), ")", F* = ",
        objective_value(modell))
println("Reduzierte Kosten von X1: ", round(Int, reduced_cost(X1)))

```

```

X = (0.0, 4.0), F* = 4.0
Reduzierte Kosten von X1: 0

```

Sonderfälle erkennen

JuMP meldet jeden Sonderfall über den **termination_status**:

```

# Unzulässiges Problem
modell = Model(HiGHS.Optimizer); set_silent(modell)
@variable(modell, X1 >= 0); @variable(modell, X2 >= 0)
@objective(modell, Max, X1 + 2X2)
@constraint(modell, X1 + X2 <= 4)
@constraint(modell, X1 >= 3)
@constraint(modell, X1 <= X2)
optimize!(modell)
println("Status: ", termination_status(modell))

```

```
Status: INFEASIBLE
```

Unbeschränktheit erkennen

```

modell = Model(HiGHS.Optimizer); set_silent(modell)
@variable(modell, X1 >= 0); @variable(modell, X2 >= 0)
@objective(modell, Max, X1 + 2X2)
@constraint(modell, X1 - X2 <= 4)
@constraint(modell, X1 + X2 >= 4)
optimize!(modell)
println("Status: ", termination_status(modell))

```

```
Status: DUAL_INFEASIBLE
```

Warum DUAL_INFEASIBLE?

HiGHS meldet Unbeschränktheit über das **Dualproblem**: Ist das primale Problem unbeschränkt, dann ist sein Dual **unzulässig** (Vorlesung 4). **DUAL_INFEASIBLE** bedeutet hier also: unbeschränkt.

Zusammenfassung

Das Wichtigste auf einen Blick

- **Duale Degeneration**: reduzierte Kosten einer NBV sind null $\Rightarrow$ **mehrere** optimale Lösungen.
- **Primale Degeneration**: eine Basisvariable ist null $\Rightarrow$ Gefahr des **Kreisens**.
- **Keine zulässige Lösung**: künstliche Variable bleibt in der Basis / kein Basistausch möglich.
- **Unbeschränktes Problem**: Pivotspalte ganz $\leq 0 \Rightarrow F \rightarrow \infty$.

Literatur

Literaturverzeichnis

Bibliografie

- [1] K. Haase u. a., „Improving pilgrim safety during the hajj: an analytical and operational research approach“, *Interfaces*, Bd. 46, Nr. 1, S. 74–90, 2016.