

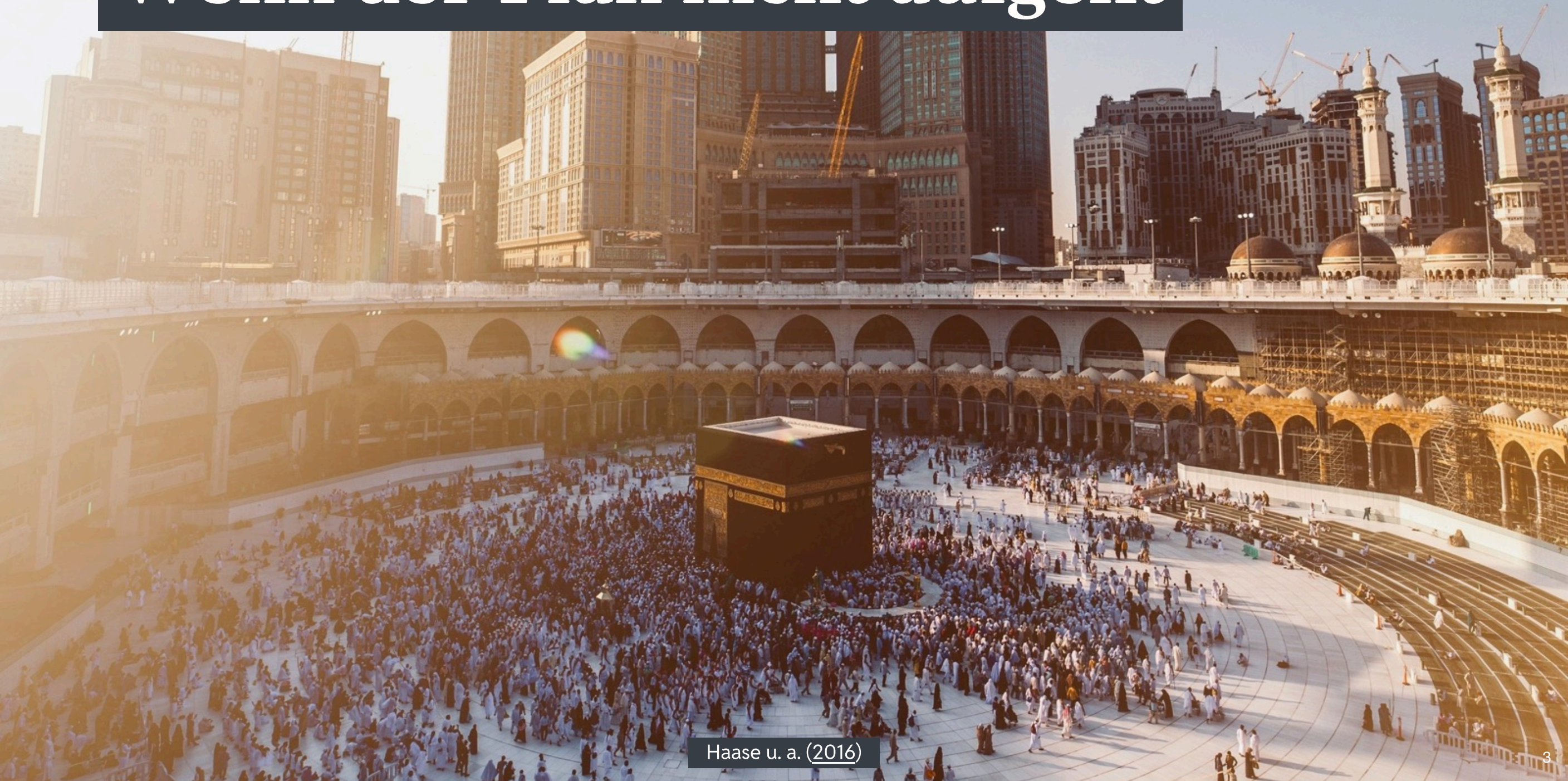
Vorlesung 05: Sonderfälle

Grundlagen Operations Research

Prof. Dr. Knut Haase

Sonderfälle

Wenn der Plan nicht aufgeht



Haase u. a. (2016)

Vier Sonderfälle

Bisher fand der Simplex stets **genau eine** optimale Lösung. Das ist nicht selbstverständlich:

Vier Sonderfälle

Bisher fand der Simplex stets **genau eine** optimale Lösung. Das ist nicht selbstverständlich:

- **Mehrdeutige** Lösung: mehrere Optima.

Vier Sonderfälle

Bisher fand der Simplex stets **genau eine** optimale Lösung. Das ist nicht selbstverständlich:

- **Mehrdeutige** Lösung: mehrere Optima.
- **Degenerierte** Basislösung: Gefahr des Kreisens.

Vier Sonderfälle

Bisher fand der Simplex stets **genau eine** optimale Lösung. Das ist nicht selbstverständlich:

- **Mehrdeutige** Lösung: mehrere Optima.
- **Degenerierte** Basislösung: Gefahr des Kreisens.
- **Keine zulässige** Lösung: leerer Lösungsraum.

Vier Sonderfälle

Bisher fand der Simplex stets **genau eine** optimale Lösung. Das ist nicht selbstverständlich:

- **Mehrdeutige** Lösung: mehrere Optima.
- **Degenerierte** Basislösung: Gefahr des Kreisens.
- **Keine zulässige** Lösung: leerer Lösungsraum.
- **Unbeschränktes** Problem: $F \rightarrow \infty$.

Vier Sonderfälle

Bisher fand der Simplex stets **genau eine** optimale Lösung. Das ist nicht selbstverständlich:

- **Mehrdeutige** Lösung: mehrere Optima.
- **Degenerierte** Basislösung: Gefahr des Kreisens.
- **Keine zulässige** Lösung: leerer Lösungsraum.
- **Unbeschränktes** Problem: $F \rightarrow \infty$.



Idee

Der Simplex **meldet** jeden Sonderfall selbst. Man muss nur wissen, wo man hinschaut: F -Zeile, b -Spalte oder Pivotspalte.

Mehrdeutigkeit

Ein einfaches Beispiel

$$\max F = X_1 + X_2$$

$$X_1 + X_2 \leq 4$$

$$X_1 \leq 2$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Ein einfaches Beispiel

$$\max F = X_1 + X_2$$

$$X_1 + X_2 \leq 4$$

$$X_1 \leq 2$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Frage: Was fällt Ihnen an Zielfunktion und erster Restriktion auf?

Ein einfaches Beispiel

$$\max F = X_1 + X_2$$

$$X_1 + X_2 \leq 4$$

$$X_1 \leq 2$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Frage: Was fällt Ihnen an Zielfunktion und erster Restriktion auf?

Die Zielfunktion verläuft **parallel** zur ersten Nebenbedingung, das führt zu einer Besonderheit.

Ein einfaches Beispiel

$$\max F = X_1 + X_2$$

$$X_1 + X_2 \leq 4$$

$$X_1 \leq 2$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Frage: Was fällt Ihnen an Zielfunktion und erster Restriktion auf?

Die Zielfunktion verläuft **parallel** zur ersten Nebenbedingung, das führt zu einer Besonderheit.

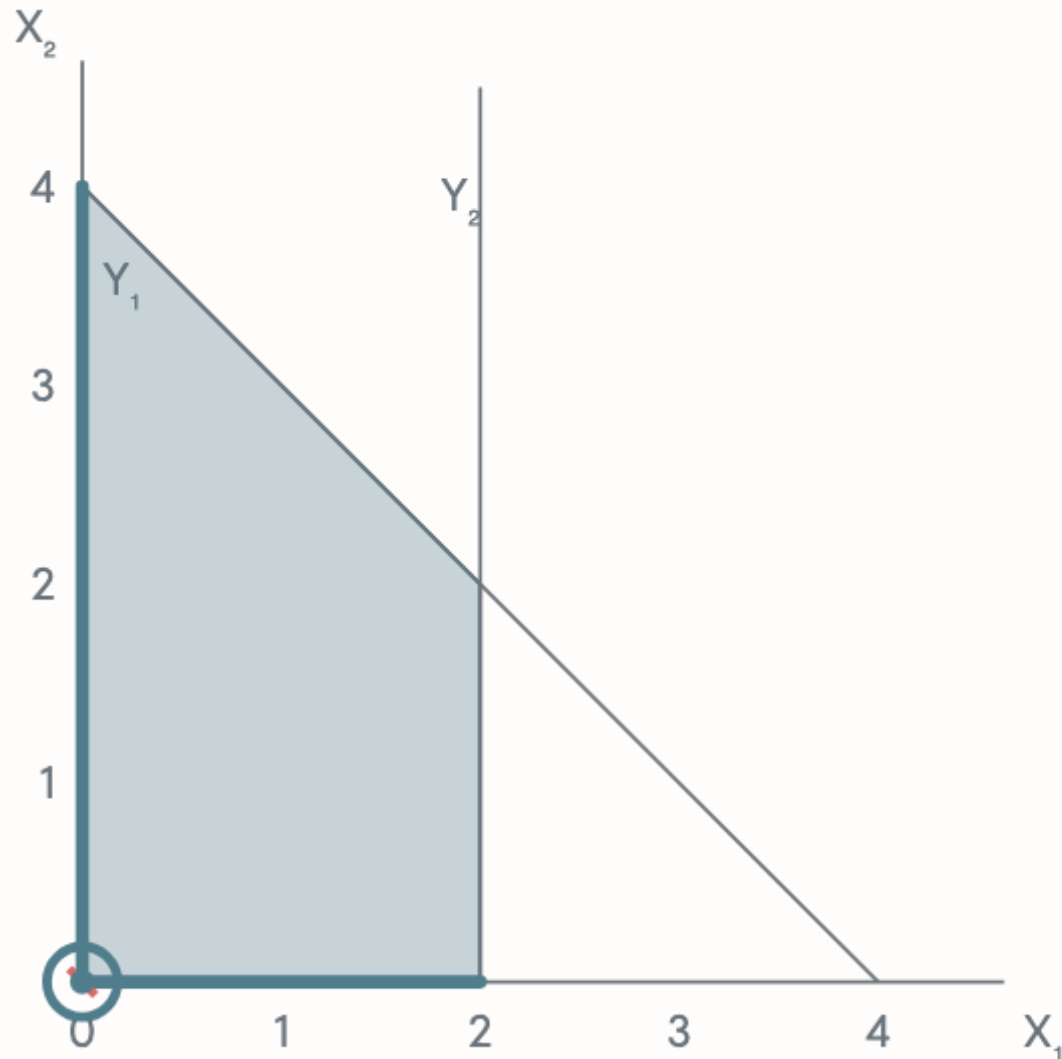


Gleich ausprobieren

Auf der nächsten Folie schieben Sie den Plan selbst. Wo liegt der beste Punkt, und ist es nur einer?

Sie sind dran

Ziehen Sie den Punkt dorthin, wo F am größten ist. Achten Sie darauf, wo die Zielgerade den Bereich zuletzt berührt und welche Werte dort null sind.



$$\max F = X_1 + X_2$$

$$X_1 \quad 0$$

$$X_2 \quad 0$$

$$Y_1 \quad 4 \quad X_1 + X_2 + Y_1 = 4$$

$$Y_2 \quad 2 \quad X_1 + Y_2 = 2$$



Eigener Plan 0

Bereit: „Optimieren“
vergleicht den Plan
mit dem besten.

Optimieren

Reset

Neu

Zwei optimale Basislösungen

Im Optimaltableau (nach zwei Pivots) sind die reduzierten Kosten der **Nichtbasisvariablen** Y_2 null, ein Basistausch kostet nichts:

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	b
Y_1	1	1	1	0	4
Y_2	1	0	0	1	2
F	-1	-1	0	0	0

F -Zeile: -1 unter X_1 und X_2 , gewählt X_1 ; Quotienten $\min\{4/1, 2/1\} = 2 \Rightarrow$ Pivot $[1]$.

Zwei optimale Basislösungen

Im Optimaltableau (nach zwei Pivots) sind die reduzierten Kosten der **Nichtbasisvariablen** Y_2 null, ein Basistausch kostet nichts:

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	b
Y_1	0	1	1	-1	2
X_1	1	0	0	1	2
F	0	-1	0	1	2

F -Zeile: -1 unter X_2 ; einziger Quotient $2/1 = 2 \Rightarrow$ Pivot $[1]$.

Zwei optimale Basislösungen

Im Optimaltableau (nach zwei Pivots) sind die reduzierten Kosten der **Nichtbasisvariablen** Y_2 null, ein Basistausch kostet nichts:

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	b
X_2	0	1	1	-1	2
X_1	1	0	0	1	2
F	0	0	1	0	4

Optimal: $X_1^* = 2, X_2^* = 2, F^* = 4$. Zeile 2 wurde 0-mal zur F -Zeile addiert: Der Simplex-Multiplikator von Y_2 bzw. die korrespondierende duale Variable ist **null** $\Rightarrow$ **duale Degeneration**.

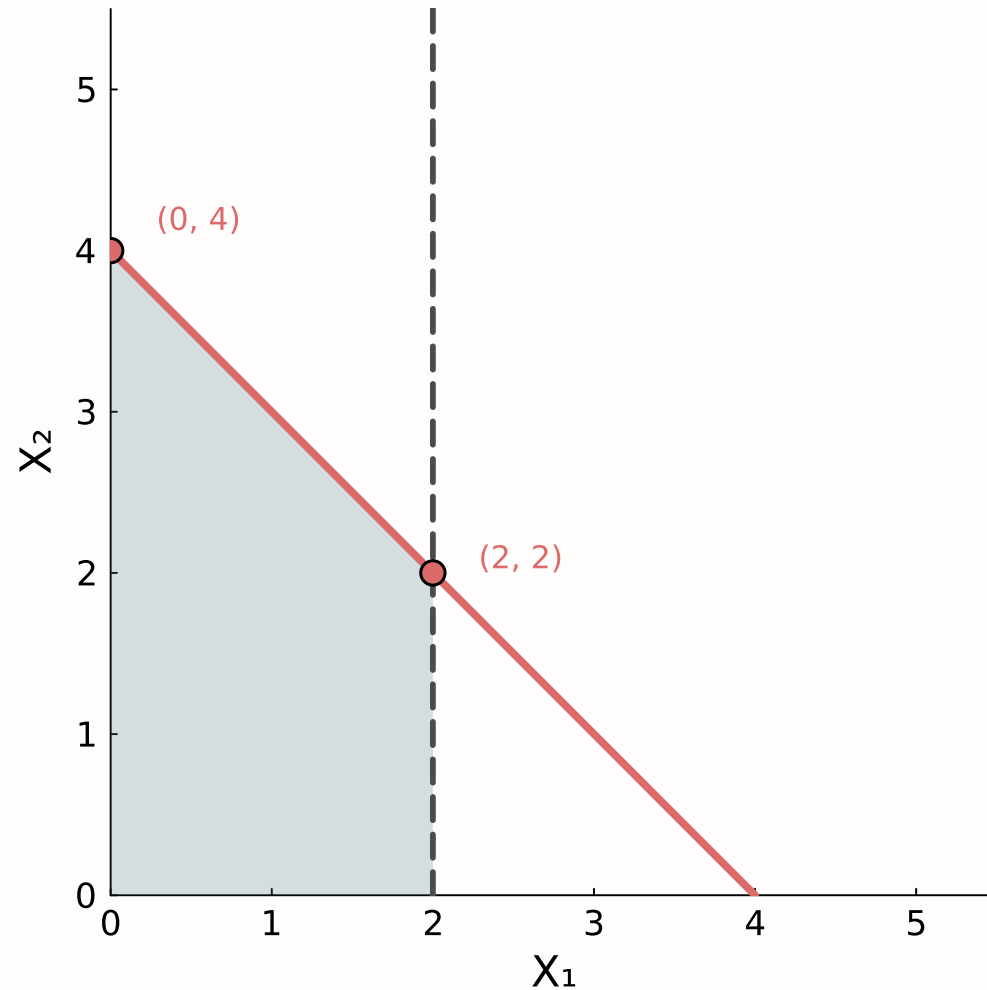
Zwei optimale Basislösungen

Im Optimaltableau (nach zwei Pivots) sind die reduzierten Kosten der **Nichtbasisvariablen** Y_2 null, ein Basistausch kostet nichts:

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	b
X_2	1	1	1	0	4
Y_2	1	0	0	1	2
F	0	0	1	0	4

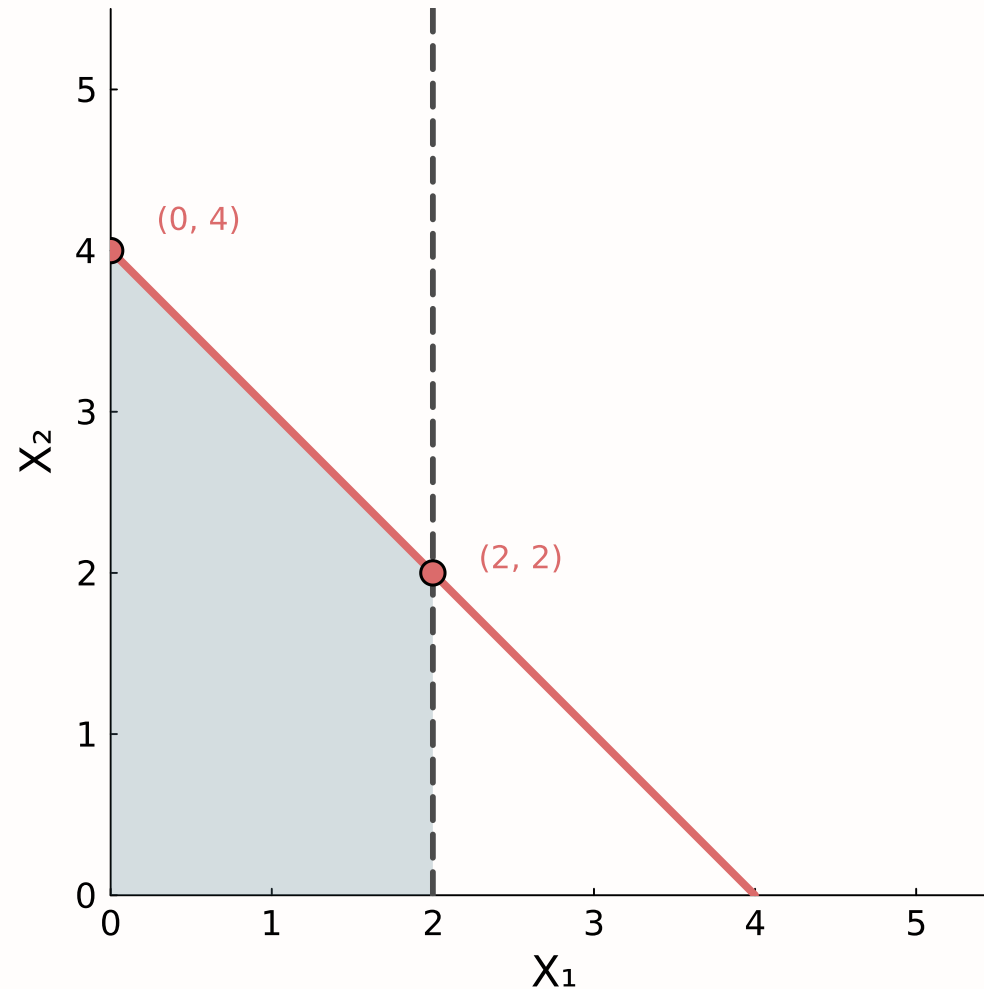
Nach dem Basistausch (Y_2 für X_1): $X_2^* = 4$, $F^* = 4$, eine **zweite** optimale Basislösung, gleicher Zielwert.

Grafische Deutung



Die Zielgerade liegt **auf** der ersten Nebenbedingung.

Grafische Deutung



Die Zielgerade liegt **auf** der ersten Nebenbedingung.

! Mehrere Optima

$(2, 2)$, $(0, 4)$ und **alle** Punkte dazwischen sind optimal.

Degeneration

Entartete Basislösung

$$\max F = X_1 + 2X_2$$

$$X_1 + X_2 \leq 4$$

$$X_1 \leq 2$$

$$X_2 \leq 2$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Am Optimum treffen sich **drei** Restriktionen in einem Punkt, eine Basisvariable wird null.

Eine Basisvariable wird null

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	b
Y_1	1	1	1	0	0	4
Y_2	1	0	0	1	0	2
Y_3	0	1	0	0	1	2
F	-1	-2	0	0	0	0

F -Zeile: -2 unter X_2 ; Quotienten $\min\{4/1, 2/1\} = 2 \Rightarrow$ Pivot $[1]$.

Eine Basisvariable wird null

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	b
Y_1	1	0	1	0	-1	2
Y_2	1	0	0	1	0	2
X_2	0	1	0	0	1	2
F	-1	0	0	0	2	4

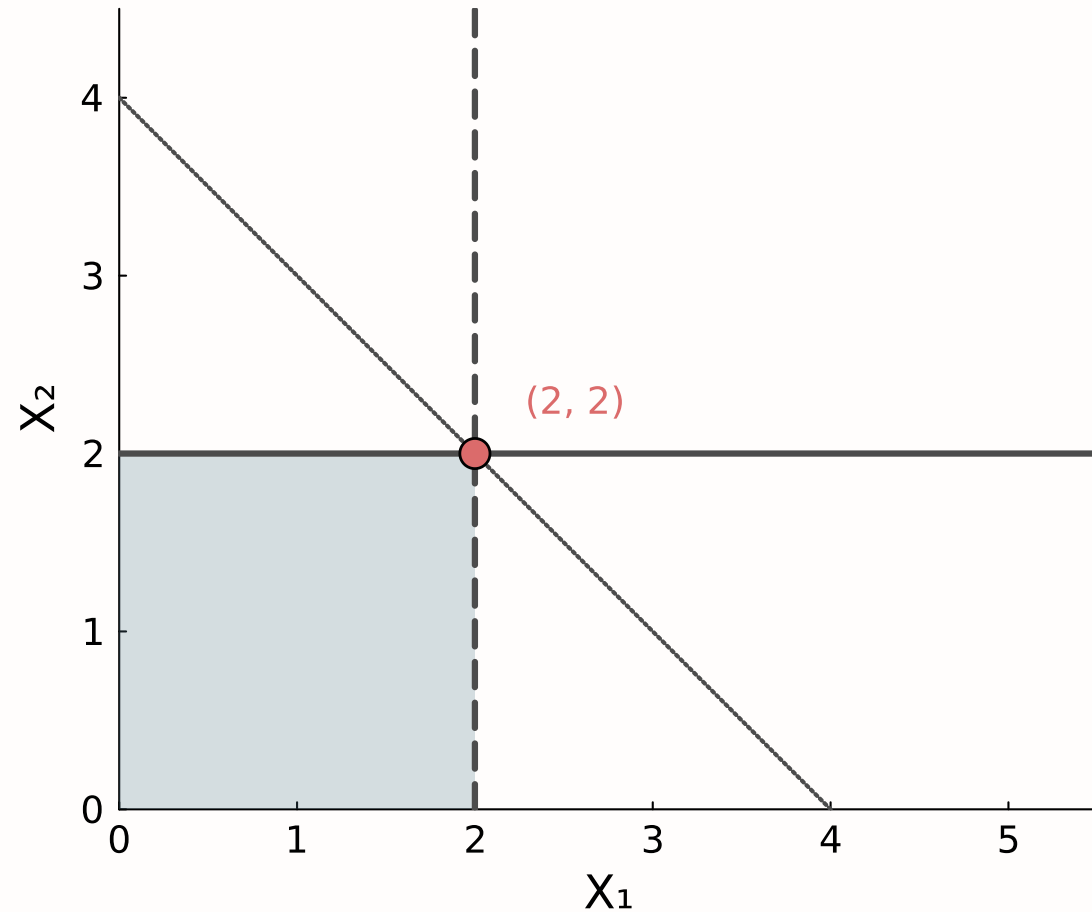
F -Zeile: -1 unter X_1 ; Quotienten $2/1 = 2/1$: **Gleichstand**. Pivot [1] in der Zeile Y_1 , dann wird auch Y_2 null.

Eine Basisvariable wird null

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	b
X_1	1	0	1	0	-1	2
Y_2	0	0	-1	1	1	0
X_2	0	1	0	0	1	2
F	0	0	1	0	1	6

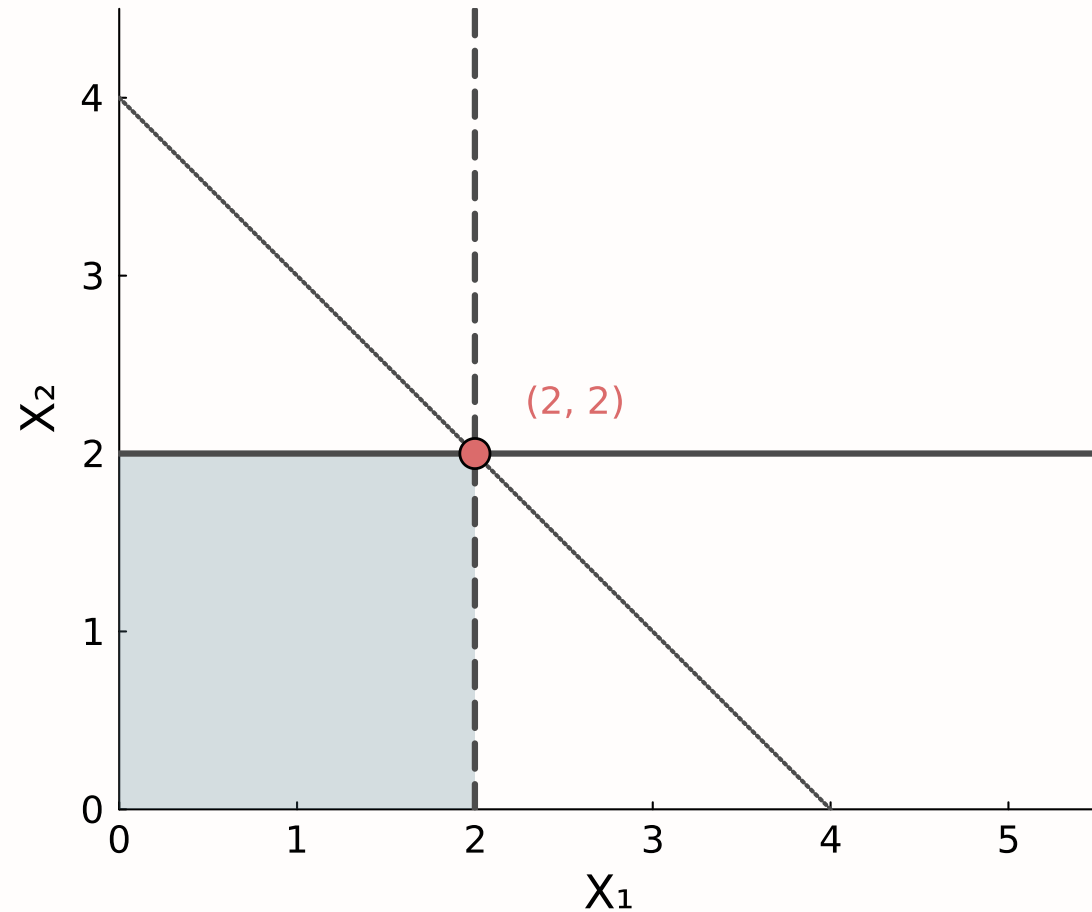
Basisvariable $Y_2 = 0$: eine **entartete** (degenerierte) Basislösung.

Grafische Deutung



Die gepunktete Restriktion ist **redundant**; sie läuft durch die optimale Ecke $(2, 2)$.

Grafische Deutung



Die gepunktete Restriktion ist **redundant**; sie läuft durch die optimale Ecke (2, 2).



Gefahr des Kreisens

Der Simplex kann zwischen Basislösungen **derselben** Eckpunkts kreisen.

Unzulässigkeit

Widersprüchliche Vorgaben

$$\max F = X_1 + 2X_2$$

$$X_1 + X_2 \leq 4$$

$$X_1 \geq 3$$

$$X_1 \leq X_2$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Widersprüchliche Vorgaben

$$\max F = X_1 + 2X_2$$

$$X_1 + X_2 \leq 4$$

$$X_1 \geq 3$$

$$X_1 \leq X_2$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Frage: Sehen Sie den Widerspruch?

Widersprüchliche Vorgaben

$$\max F = X_1 + 2X_2$$

$$X_1 + X_2 \leq 4$$

$$X_1 \geq 3$$

$$X_1 \leq X_2$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Frage: Sehen Sie den Widerspruch?

$X_1 \geq 3$ und $X_1 \leq X_2$ erzwingen $X_1 + X_2 \geq 6 > 4$. Aber wie merkt das der **Simplex**?

Zweiphasen als Detektor

Die $\geq$ -Zeile erhält eine künstliche Variable: $X_1 - Y_2 + Z_1 = 3$, also Z-
Zeile $-X_1 + Y_2 + Z = -3$.

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	Z_1	b
Y_1	1	1	1	0	0	0	4
Z_1	1	0	0	-1	0	1	3
Y_3	1	-1	0	0	1	0	0
F	-1	-2	0	0	0	0	0
Z	-1	0	0	1	0	0	-3

Z-Zeile: -1 unter X_1 ; kleinster Quotient $0/1 \Rightarrow$ Pivot [1].

Zweiphasen als Detektor

Die $\geq$ -Zeile erhält eine künstliche Variable: $X_1 - Y_2 + Z_1 = 3$, also Z -Zeile $-X_1 + Y_2 + Z = -3$.

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	Z_1	b
Y_1	0	2	1	0	-1	0	4
Z_1	0	1	0	-1	-1	1	3
X_1	1	-1	0	0	1	0	0
F	0	-3	0	0	1	0	0
Z	0	-1	0	1	1	0	-3

Z -Zeile: -1 unter X_2 ; Quotienten $\min\{4/2, 3/1\} = 2 \Rightarrow$ Pivot [2].

Zweiphasen als Detektor

Die $\geq$ -Zeile erhält eine künstliche Variable: $X_1 - Y_2 + Z_1 = 3$, also Z -Zeile $-X_1 + Y_2 + Z = -3$.

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	Z_1	b
X_2	0	1	$1/2$	0	$-1/2$	0	2
Z_1	0	0	$-1/2$	-1	$-1/2$	1	1
X_1	1	0	$1/2$	0	$1/2$	0	2
F	0	0	$3/2$	0	$-1/2$	0	6
Z	0	0	$1/2$	1	$1/2$	0	-1

Die Z -Zeile hat **keine** negativen Einträge mehr, aber $Z_1 = 1$ bleibt in der Basis: **keine zulässige Lösung**.

Dualer Simplex als Detektor

Alternative: $X_1 \geq 3$ mit -1 multipliziert ($-X_1 + Y_2 = -3$). Die Startlösung ist unzulässig, der **duale Simplex** übernimmt.

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	b
Y_1	1	1	1	0	0	4
Y_2	-1	0	0	1	0	-3
Y_3	1	-1	0	0	1	0
F	-1	-2	0	0	0	0

$Y_2 = -3$ ist unzulässig; einziger negativer Koeffizient $\Rightarrow$ Pivot $[-1]$.

Dualer Simplex als Detektor

Alternative: $X_1 \geq 3$ mit -1 multipliziert ($-X_1 + Y_2 = -3$). Die Startlösung ist unzulässig, der **duale Simplex** übernimmt.

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	b
Y_1	0	1	1	1	0	1
X_1	1	0	0	-1	0	3
Y_3	0	-1	0	1	1	-3
F	0	-2	0	-1	0	3

Jetzt ist $Y_3 = -3$ unzulässig; wieder nur ein Kandidat $\Rightarrow$ Pivot $[-1]$.

Dualer Simplex als Detektor

Alternative: $X_1 \geq 3$ mit -1 multipliziert ($-X_1 + Y_2 = -3$). Die Startlösung ist unzulässig, der **duale Simplex** übernimmt.

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	b
Y_1	0	0	1	2	1	-2
X_1	1	0	0	-1	0	3
X_2	0	1	0	-1	-1	3
F	0	0	0	-3	-2	9

$Y_1 = -2$ ist unzulässig, aber die Zeile hat **keinen negativen** Koeffizienten, kein zulässiger Basistausch: **keine zulässige Lösung**.

Zwei Wege, ein Befund

Zwei Wege, ein Befund

- **Zweiphasenmethode:** Phase 1 endet mit einer künstlichen Variablen $Z_1 > 0$ in der Basis, obwohl keine Verbesserung mehr möglich ist.

Zwei Wege, ein Befund

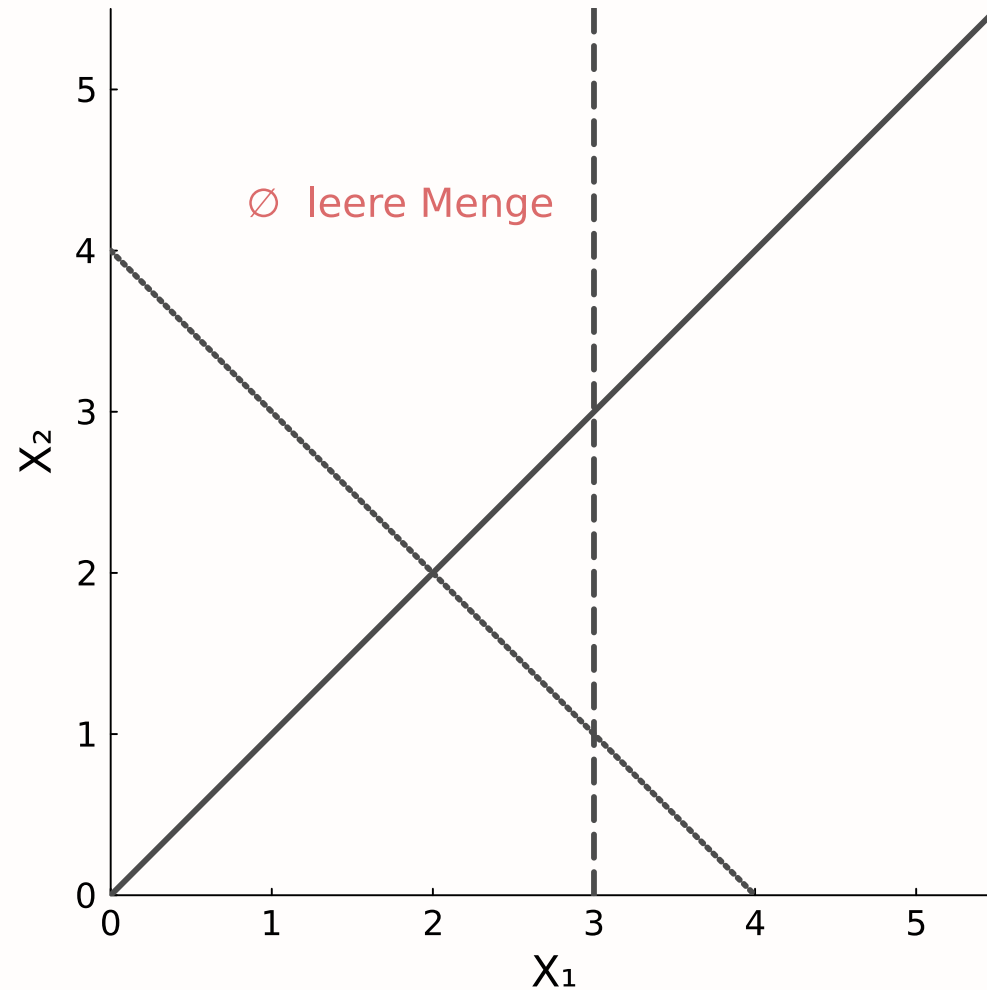
- **Zweiphasenmethode:** Phase 1 endet mit einer künstlichen Variablen $Z_1 > 0$ in der Basis, obwohl keine Verbesserung mehr möglich ist.
- **Dualer Simplex:** für eine negative Basisvariable existiert **kein** zulässiger Basistausch.

Zwei Wege, ein Befund

- **Zweiphasenmethode:** Phase 1 endet mit einer künstlichen Variablen $Z_1 > 0$ in der Basis, obwohl keine Verbesserung mehr möglich ist.
- **Dualer Simplex:** für eine negative Basisvariable existiert **kein** zulässiger Basistausch.

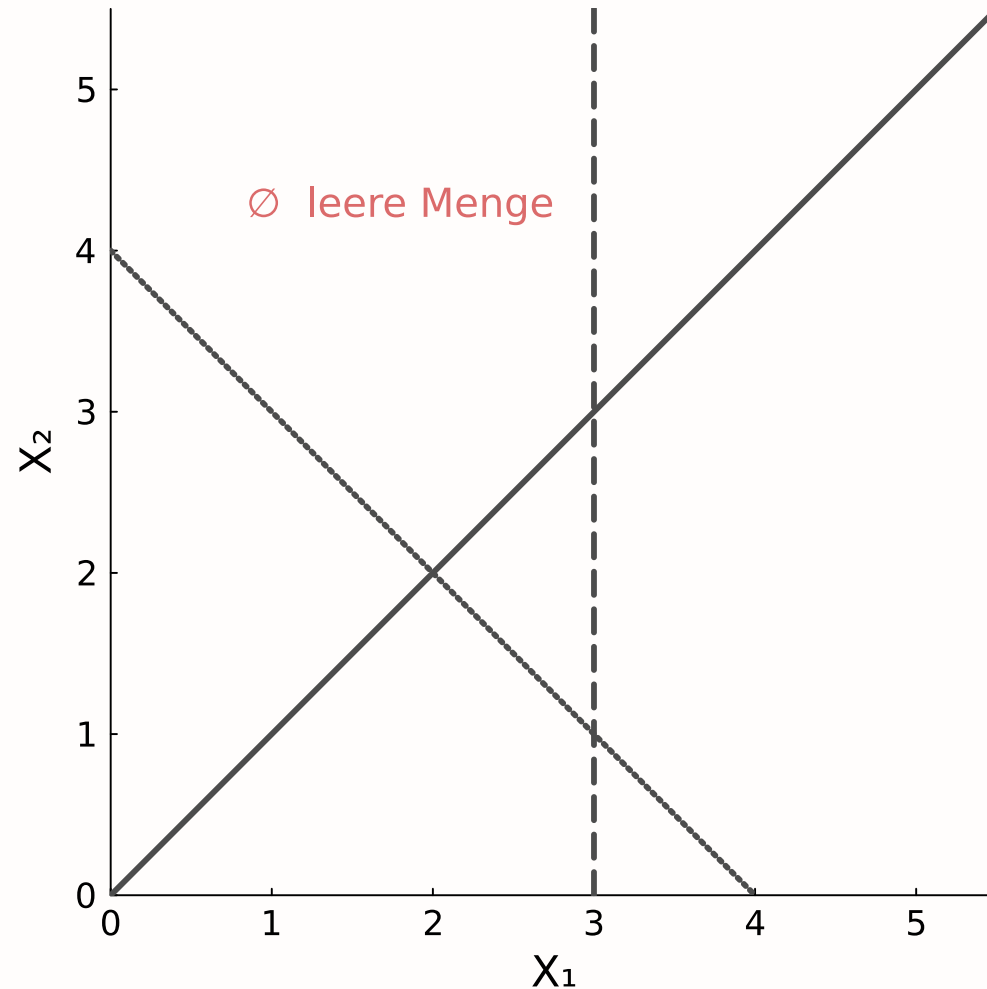
Beides signalisiert dasselbe: der Lösungsraum ist **leer**.

Grafische Deutung



Die drei Halbräume haben **keine** gemeinsame Fläche.

Grafische Deutung



Die drei Halbräume haben **keine** gemeinsame Fläche.

! Leere Lösungsmenge

Es gibt **keine** zulässige Lösung.

Unbeschränktheit

Unbegrenzte Zielfunktion

$$\max F = X_1 + 2X_2$$

$$X_1 - X_2 \leq 4$$

$$X_1 + X_2 \geq 4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Der zulässige Bereich ist nach **oben offen**, die Zielfunktion kennt keine Schranke.

Erkennung im Simplex

Die $\geq$ -Zeile mit -1 multipliziert ($-X_1 - X_2 + Y_2 = -4$). Die Startlösung ist unzulässig, der **duale Simplex** übernimmt.

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	b
Y_1	1	-1	1	0	4
Y_2	-1	-1	0	1	-4
F	-1	-2	0	0	0

$Y_2 = -4$ ist unzulässig: Pivotzeile Y_2 . Spaltenregel aus Vorlesung 3:
 $\max\{(-1)/(-1), (-2)/(-1)\} = 2 \Rightarrow$ Pivot $[-1]$ unter X_2 .

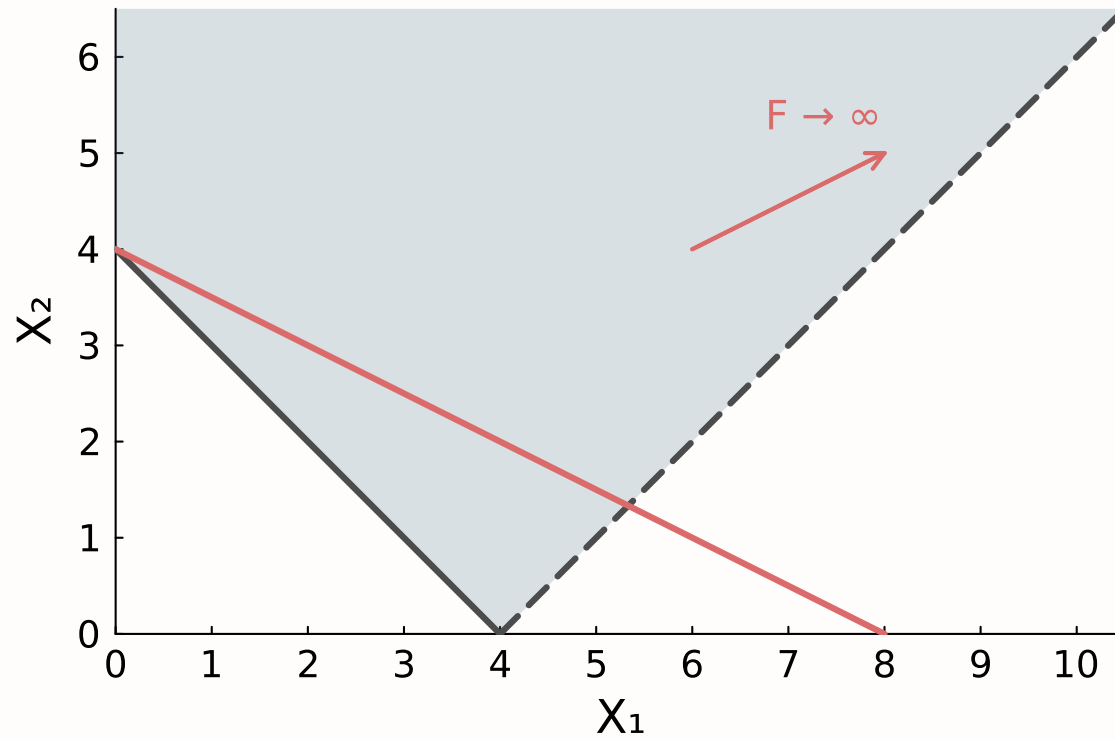
Erkennung im Simplex

Die $\geq$ -Zeile mit -1 multipliziert ($-X_1 - X_2 + Y_2 = -4$). Die Startlösung ist unzulässig, der **duale Simplex** übernimmt.

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	b
Y_1	2	0	1	-1	8
X_2	1	1	0	-1	4
F	1	0	0	-2	8

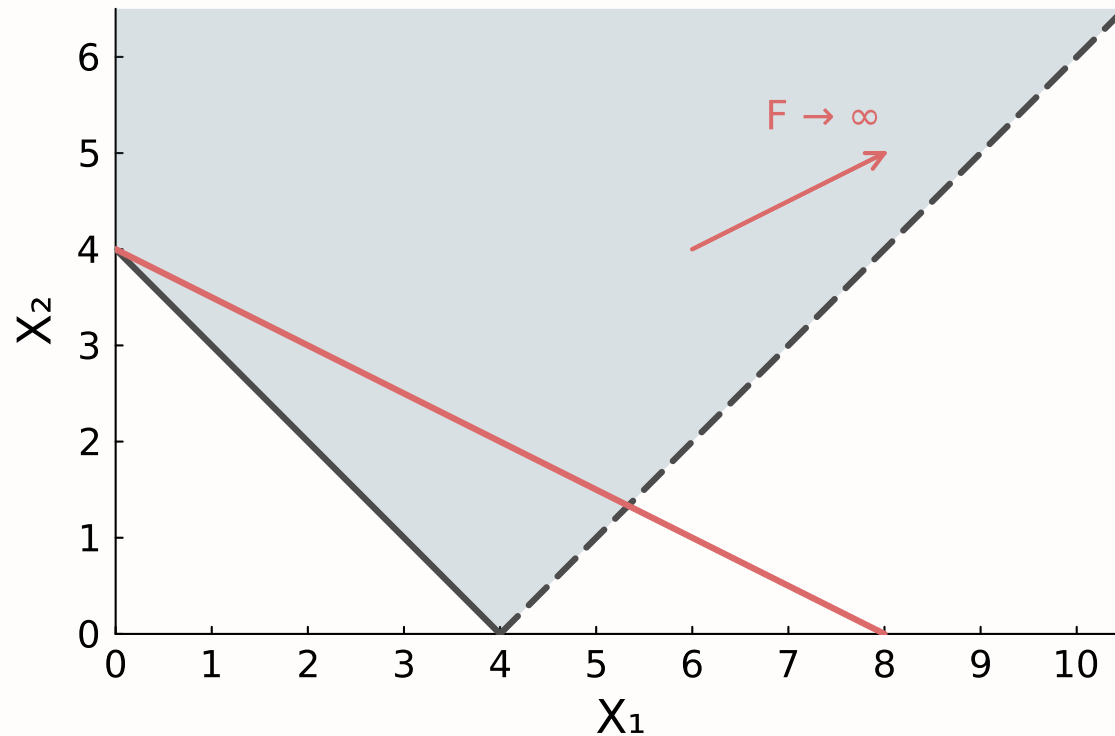
Y_2 soll in die Basis, aber **alle** Koeffizienten der Pivotspalte sind ≤ 0 . Es gibt keine Schranke: F ist beliebig steigerbar.

Grafische Deutung



Die Zielgerade lässt sich **beliebig** nach rechts oben schieben.

Grafische Deutung



Die Zielgerade lässt sich **beliebig** nach rechts oben schieben.



Keine endliche Lösung

$F \rightarrow \infty$: das Problem ist **unbeschränkt**.

Sonderfälle im dualen Problem

Jeder Fall hat ein Gegenstück im dualen Problem (Vorlesung 4):

Sonderfälle im dualen Problem

Jeder Fall hat ein Gegenstück im dualen Problem (Vorlesung 4):

- Primal **optimal** $\Leftrightarrow$ dual **optimal**, mit gleichem Zielwert (starke Dualität).

Sonderfälle im dualen Problem

Jeder Fall hat ein Gegenstück im dualen Problem (Vorlesung 4):

- Primal **optimal** $\Leftrightarrow$ dual **optimal**, mit gleichem Zielwert (starke Dualität).
- Primal **unbeschränkt** $\Rightarrow$ dual **unzulässig**.

Sonderfälle im dualen Problem

Jeder Fall hat ein Gegenstück im dualen Problem (Vorlesung 4):

- Primal **optimal** $\Leftrightarrow$ dual **optimal**, mit gleichem Zielwert (starke Dualität).
- Primal **unbeschränkt** $\Rightarrow$ dual **unzulässig**.
- Primal **unzulässig** $\Rightarrow$ dual **unbeschränkt** oder **unzulässig**.

Sonderfälle im dualen Problem

Jeder Fall hat ein Gegenstück im dualen Problem (Vorlesung 4):

- Primal **optimal** $\Leftrightarrow$ dual **optimal**, mit gleichem Zielwert (starke Dualität).
- Primal **unbeschränkt** $\Rightarrow$ dual **unzulässig**.
- Primal **unzulässig** $\Rightarrow$ dual **unbeschränkt** oder **unzulässig**.

Das Dual des Duals ist wieder das Primal: Die Regeln gelten auch in Gegenrichtung.

Kontrolle mit Julia

Mehrdeutigkeit erkennen

Die **reduzierten Kosten** verraten die Mehrdeutigkeit: HiGHS findet die Ecke (0,4); die Nichtbasisvariable X_1 hat reduzierte Kosten **null**, ein Basistausch wäre gratis:

```
1 using JuMP, HiGHS
2
3 modell = Model(HiGHS.Optimizer); set_silent(modell)
4 @variable(modell, X1 >= 0); @variable(modell, X2 >= 0)
5 @objective(modell, Max, X1 + X2)
6 @constraint(modell, X1 + X2 <= 4)
7 @constraint(modell, X1 <= 2)
8 optimize!(modell)
9 println("X = (", value(X1), ", ", value(X2), ")", F* = ",
10         objective_value(modell))
11 println("Reduzierte Kosten von X1: ", round{Int, reduced_cost(X1))
```

Mehrdeutigkeit erkennen

Die **reduzierten Kosten** verraten die Mehrdeutigkeit: HiGHS findet die Ecke (0,4); die Nichtbasisvariable X_1 hat reduzierte Kosten **null**, ein Basistausch wäre gratis:

```
1 using JuMP, HiGHS
2
3 modell = Model(HiGHS.Optimizer); set_silent(modell)
4 @variable(modell, X1 >= 0); @variable(modell, X2 >= 0)
5 @objective(modell, Max, X1 + X2)
6 @constraint(modell, X1 + X2 <= 4)
7 @constraint(modell, X1 <= 2)
8 optimize!(modell)
9 println("X = (", value(X1), ", ", value(X2), "), F* = ",
10         objective_value(modell))
11 println("Reduzierte Kosten von X1: ", round{Int, reduced_cost(X1)})
```

X = (0.0, 4.0), F* = 4.0

Reduzierte Kosten von X1: 0

Sonderfälle erkennen

JuMP meldet jeden Sonderfall über den **termination_status**:

```
1 # Unzulässiges Problem
2 modell = Model(HiGHS.Optimizer); set_silent(modell)
3 @variable(modell, X1 >= 0); @variable(modell, X2 >= 0)
4 @objective(modell, Max, X1 + 2X2)
5 @constraint(modell, X1 + X2 <= 4)
6 @constraint(modell, X1 >= 3)
7 @constraint(modell, X1 <= X2)
8 optimize!(modell)
9 println("Status: ", termination_status(modell))
```

Sonderfälle erkennen

JuMP meldet jeden Sonderfall über den **termination_status**:

```
1 # Unzulässiges Problem
2 modell = Model(HiGHS.Optimizer); set_silent(modell)
3 @variable(modell, X1 >= 0); @variable(modell, X2 >= 0)
4 @objective(modell, Max, X1 + 2X2)
5 @constraint(modell, X1 + X2 <= 4)
6 @constraint(modell, X1 >= 3)
7 @constraint(modell, X1 <= X2)
8 optimize!(modell)
9 println("Status: ", termination_status(modell))
```

Status: INFEASIBLE

Unbeschränktheit erkennen

```
1 modell = Model(HiGHS.Optimizer); set_silent(modell)
2 @variable(modell, X1 >= 0); @variable(modell, X2 >= 0)
3 @objective(modell, Max, X1 + 2X2)
4 @constraint(modell, X1 - X2 <= 4)
5 @constraint(modell, X1 + X2 >= 4)
6 optimize!(modell)
7 println("Status: ", termination_status(modell))
```

Unbeschränktheit erkennen

```
1 modell = Model(HiGHS.Optimizer); set_silent(modell)
2 @variable(modell, X1 >= 0); @variable(modell, X2 >= 0)
3 @objective(modell, Max, X1 + 2X2)
4 @constraint(modell, X1 - X2 <= 4)
5 @constraint(modell, X1 + X2 >= 4)
6 optimize!(modell)
7 println("Status: ", termination_status(modell))
```

Status: DUAL_INFEASIBLE

Unbeschränktheit erkennen

```
1 modell = Model(HiGHS.Optimizer); set_silent(modell)
2 @variable(modell, X1 >= 0); @variable(modell, X2 >= 0)
3 @objective(modell, Max, X1 + 2X2)
4 @constraint(modell, X1 - X2 <= 4)
5 @constraint(modell, X1 + X2 >= 4)
6 optimize!(modell)
7 println("Status: ", termination_status(modell))
```

Status: DUAL_INFEASIBLE

Warum **DUAL_INFEASIBLE**?

HiGHS meldet Unbeschränktheit über das **Dualproblem**: Ist das primale Problem unbeschränkt, dann ist sein Dual **unzulässig**. **DUAL_INFEASIBLE** bedeutet hier also: unbeschränkt.

Zusammenfassung

Das Wichtigste auf einen Blick

Das Wichtigste auf einen Blick

- **Duale Degeneration:** reduzierte Kosten einer NBV sind null $\Rightarrow$ mehrere optimale Lösungen.

Das Wichtigste auf einen Blick

- **Duale Degeneration:** reduzierte Kosten einer NBV sind null $\Rightarrow$ mehrere optimale Lösungen.
- **Primale Degeneration:** eine Basisvariable ist null $\Rightarrow$ Gefahr des Kreisens.

Das Wichtigste auf einen Blick

- **Duale Degeneration:** reduzierte Kosten einer NBV sind null $\Rightarrow$ mehrere optimale Lösungen.
- **Primale Degeneration:** eine Basisvariable ist null $\Rightarrow$ Gefahr des Kreisens.
- **Keine zulässige Lösung:** künstliche Variable bleibt in der Basis / kein Basistausch möglich.

Das Wichtigste auf einen Blick

- **Duale Degeneration:** reduzierte Kosten einer NBV sind null $\Rightarrow$ mehrere optimale Lösungen.
- **Primale Degeneration:** eine Basisvariable ist null $\Rightarrow$ Gefahr des Kreisens.
- **Keine zulässige Lösung:** künstliche Variable bleibt in der Basis / kein Basistausch möglich.
- **Unbeschränktes Problem:** Pivotspalte ganz $\leq 0 \Rightarrow F \rightarrow \infty$.

Literatur

Literaturverzeichnis

- Domschke, Wolfgang, Andreas Drexl, Robert Klein, und Armin Scholl. 2015. *Einführung in Operations Research*. 9. Aufl. Springer Gabler. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-48216-2>.
- Haase, Knut, Habib Zain Al Abideen, Salim Al-Bosta, u. a. 2016. „Improving Pilgrim Safety During the Hajj: An Analytical and Operational Research Approach“. *Interfaces* 46 (1): 74–90. <https://doi.org/10.1287/inte.2015.0833>.