

Vorlesung 04: Dualität & Zweiphasen

Grundlagen Operations Research

Prof. Dr. Knut Haase

Zweiphasen

Kein einfacher Start



Kein zulässiger Startpunkt

Bisher lieferte $X_1 = X_2 = 0$ stets eine zulässige Startlösung. Bei $\geq$ -Restriktionen gilt das **nicht** mehr:

$$\max F = 2X_1 + X_2$$

$$X_1 + X_2 \geq 8$$

$$2X_1 + X_2 \geq 10$$

$$X_1 + X_2 \leq 10$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Mit Schlupfvariablen:

$$X_1 + X_2 - Y_1 = 8$$

$$2X_1 + X_2 - Y_2 = 10$$

$$X_1 + X_2 + Y_3 = 10$$

Kein zulässiger Startpunkt

Bisher lieferte $X_1 = X_2 = 0$ stets eine zulässige Startlösung. Bei $\geq$ -Restriktionen gilt das **nicht** mehr:

$$\max F = 2X_1 + X_2$$

$$X_1 + X_2 \geq 8$$

$$2X_1 + X_2 \geq 10$$

$$X_1 + X_2 \leq 10$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Mit Schlupfvariablen:

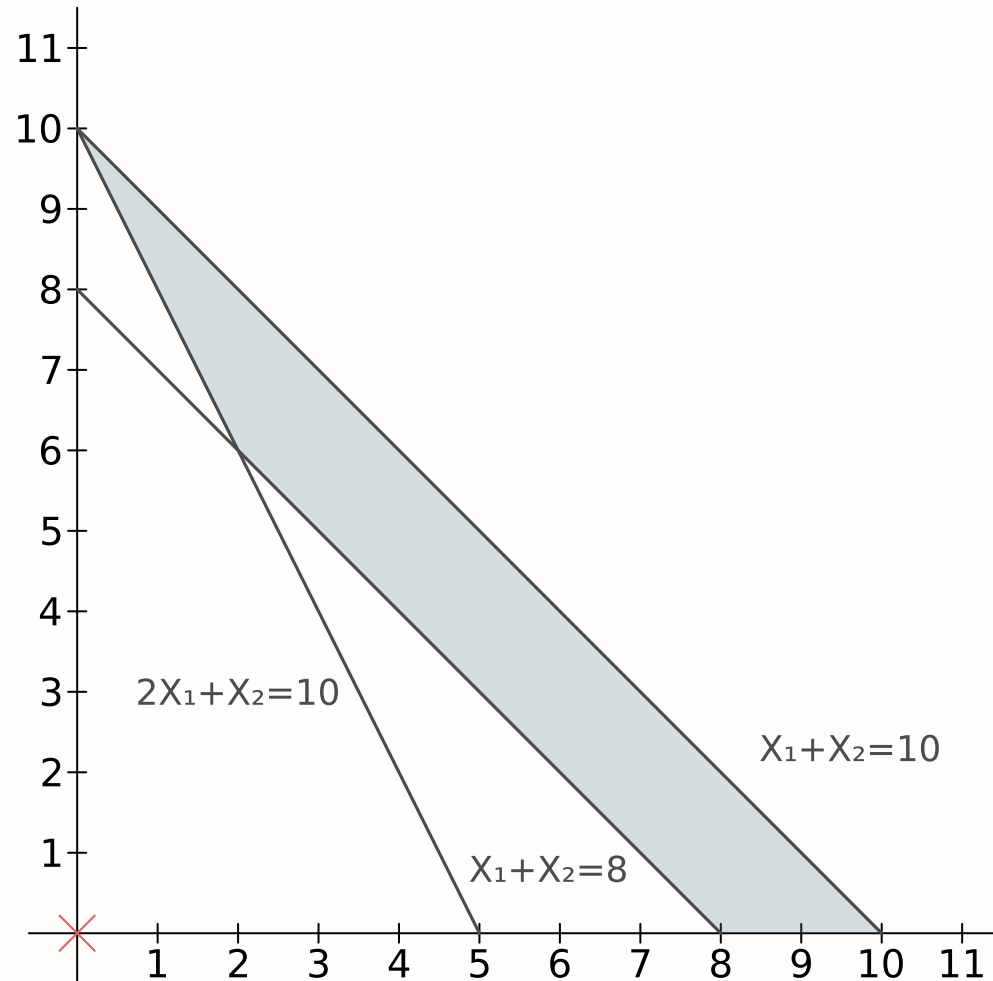
$$X_1 + X_2 - Y_1 = 8$$

$$2X_1 + X_2 - Y_2 = 10$$

$$X_1 + X_2 + Y_3 = 10$$

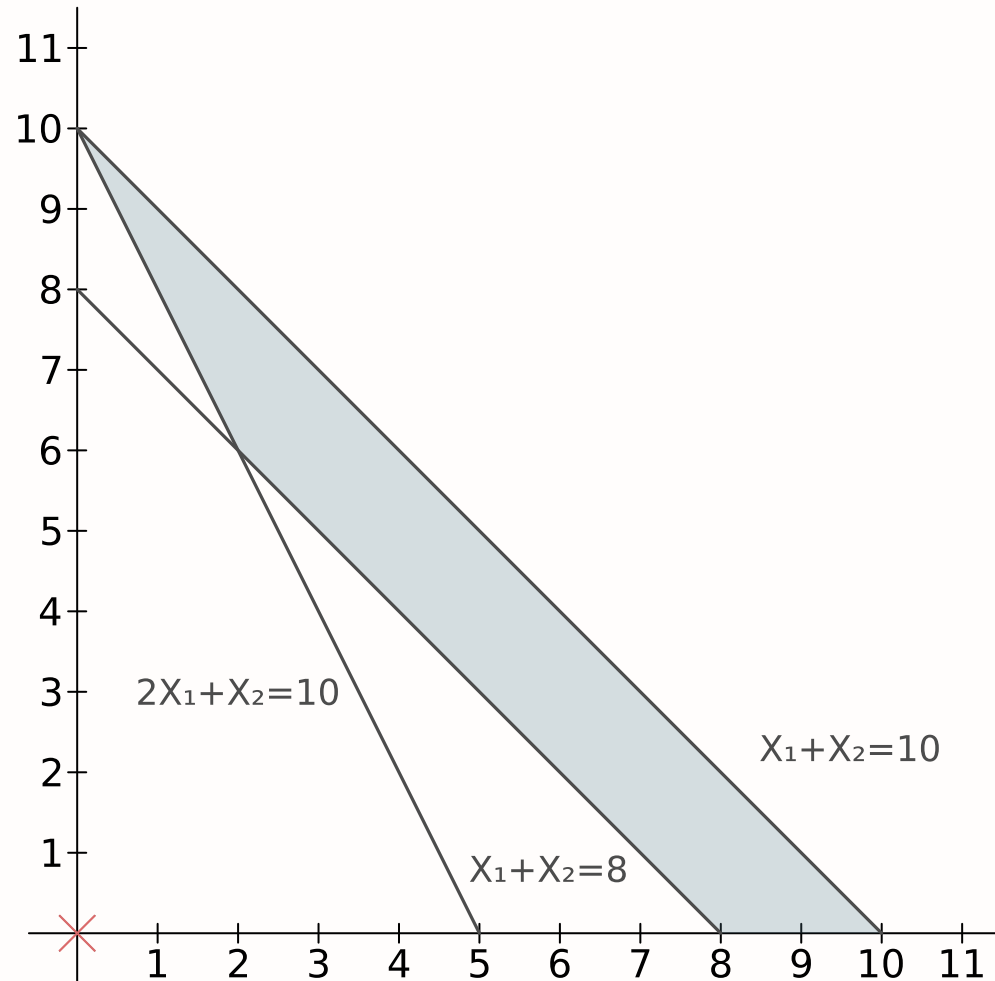
Für $X_1 = X_2 = 0$ folgt $Y_1 = -8$, $Y_2 = -10$: **unzulässig**.

Der zulässige Bereich



Der Ursprung (x) liegt
außerhalb des zulässigen
Bereichs.

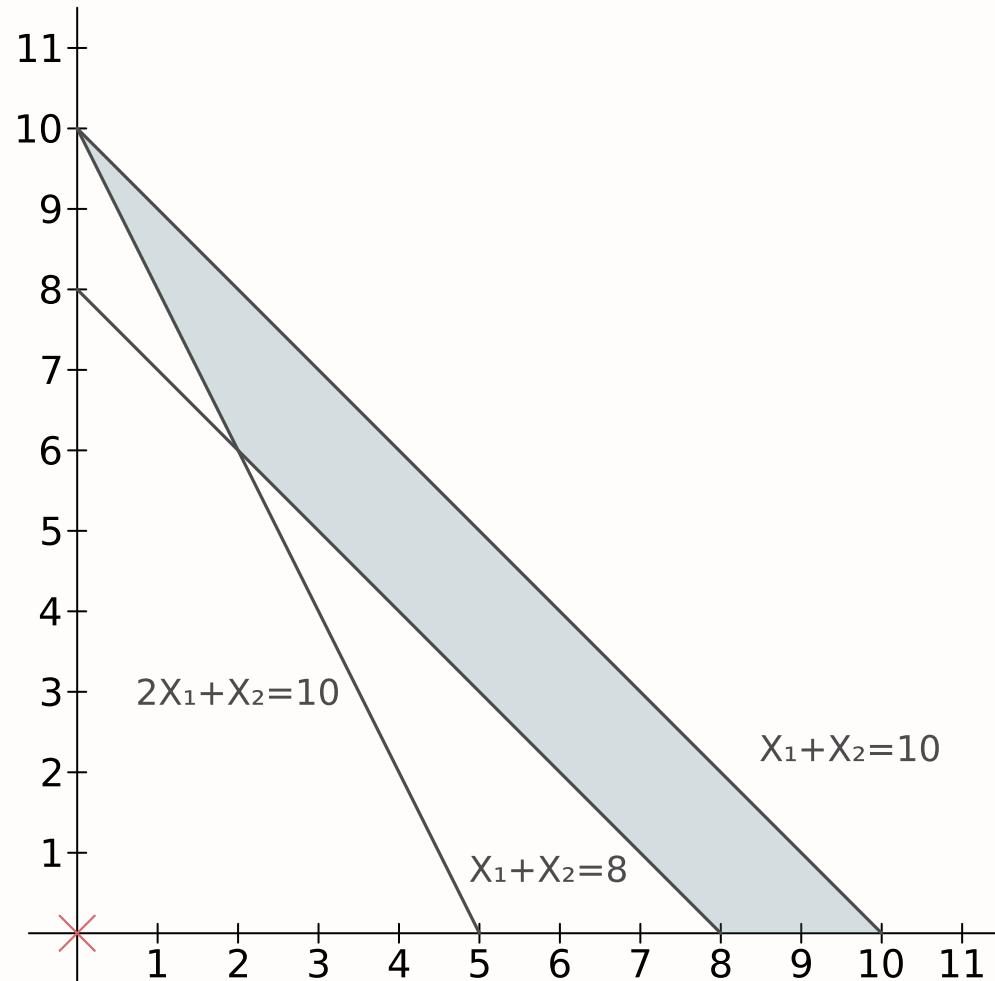
Der zulässige Bereich



Der Ursprung (x) liegt **außerhalb** des zulässigen Bereichs.

Frage: Wo darf der Simplex dann starten?

Der zulässige Bereich



Der Ursprung (x) liegt **außerhalb** des zulässigen Bereichs.

Frage: Wo darf der Simplex dann starten?

Er braucht erst eine **zulässige Basislösung**. Genau die liefert Phase 1.

Künstliche Variablen

Wir fügen in die $\geq$ -Zeilen **künstliche Variablen** $Z_1, Z_2 \geq 0$ ein:

$$X_1 + X_2 - Y_1 + Z_1 = 8$$

$$2X_1 + X_2 - Y_2 + Z_2 = 10$$

$$X_1 + X_2 + Y_3 = 10$$

Künstliche Variablen

Wir fügen in die $\geq$ -Zeilen **künstliche Variablen** $Z_1, Z_2 \geq 0$ ein:

$$X_1 + X_2 - Y_1 + Z_1 = 8$$

$$2X_1 + X_2 - Y_2 + Z_2 = 10$$

$$X_1 + X_2 + Y_3 = 10$$

Jetzt ist $Z_1 = 8, Z_2 = 10, Y_3 = 10$ eine **formal** zulässige Startlösung.

Künstliche Variablen

Wir fügen in die $\geq$ -Zeilen **künstliche Variablen** $Z_1, Z_2 \geq 0$ ein:

$$X_1 + X_2 - Y_1 + Z_1 = 8$$

$$2X_1 + X_2 - Y_2 + Z_2 = 10$$

$$X_1 + X_2 + Y_3 = 10$$

Jetzt ist $Z_1 = 8, Z_2 = 10, Y_3 = 10$ eine **formal** zulässige Startlösung.

Inhaltlich zulässig erst, wenn $Z_1 = Z_2 = 0$: die künstlichen Variablen müssen wieder aus der Basis.

Grundsätzliches Vorgehen

 Idee der Zweiphasenmethode

Grundsätzliches Vorgehen

Idee der Zweiphasenmethode

1. **Phase 1:** künstliche Variablen eliminieren $\Rightarrow$ zulässige Lösung.

Grundsätzliches Vorgehen

Idee der Zweiphasenmethode

1. **Phase 1:** künstliche Variablen eliminieren $\Rightarrow$ zulässige Lösung.
2. **Phase 2:** primaler Simplex $\Rightarrow$ optimale Lösung.

Grundsätzliches Vorgehen

Idee der Zweiphasenmethode

1. **Phase 1:** künstliche Variablen eliminieren $\Rightarrow$ zulässige Lösung.
2. **Phase 2:** primaler Simplex $\Rightarrow$ optimale Lösung.

In Phase 1 minimieren wir die Summe der künstlichen Variablen:

$$\text{Minimiere } Z = \sum_i Z_i \quad \Leftrightarrow \quad \text{Maximiere } Z = -\sum_i Z_i$$

Zielfunktion der ersten Phase

Wir drücken Z durch die Nichtbasisvariablen aus:

$$Z = -(8 - X_1 - \underset{\tilde{Z}_1}{X_2} + Y_1) - (10 - 2X_1 - \underset{\tilde{Z}_2}{X_2} + Y_2)$$

Zielfunktion der ersten Phase

Wir drücken Z durch die Nichtbasisvariablen aus:

$$Z = -(8 - \underbrace{X_1}_{\tilde{Z}_1} - \underbrace{X_2}_{\tilde{Z}_2} + Y_1) - (10 - 2\underbrace{X_1}_{\tilde{Z}_1} - \underbrace{X_2}_{\tilde{Z}_2} + Y_2)$$

$$Z = -18 + 3X_1 + 2X_2 - Y_1 - Y_2$$

Diese Hilfszielfunktion steuert Phase 1, bis $Z = 0$ erreicht ist.

Alternative: M-Methode

M-Methode

Statt einer eigenen Phase 1 bestraft die **M-Methode** die künstlichen Variablen direkt in der Originalzielfunktion: $\max F = 2X_1 + X_2 - MZ_1 - MZ_2$ mit sehr großem M .

Alternative: M-Methode

M-Methode

Statt einer eigenen Phase 1 bestraft die **M-Methode** die künstlichen Variablen direkt in der Originalzielfunktion: $\max F = 2X_1 + X_2 - MZ_1 - MZ_2$ mit sehr großem M .

Eine Phase statt zwei, aber numerisch heikler. Wir rechnen mit der Zweiphasenmethode.

Ablauf im Tableau

Phase 1 startet mit Z_1, Z_2, Y_3 in der Basis; die F -Zeile wird nur **mitgeführt**, die Pivotwahl trifft die Z -Zeile:

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	Z_1	Z_2	b
Z_1	1	1	-1	0	0	1	0	8
Z_2	2	1	0	-1	0	0	1	10
Y_3	1	1	0	0	1	0	0	10
F	-2	-1	0	0	0	0	0	0
Z	-3	-2	1	1	0	0	0	-18

Ablauf im Tableau

Phase 1 startet mit Z_1, Z_2, Y_3 in der Basis; die F -Zeile wird nur **mitgeführt**, die Pivotwahl trifft die Z -Zeile:

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	Z_1	Z_2	b
Z_1	1	1	-1	0	0	1	0	8
Z_2	2	1	0	-1	0	0	1	10
Y_3	1	1	0	0	1	0	0	10
F	-2	-1	0	0	0	0	0	0
Z	-3	-2	1	1	0	0	0	-18

Z -Zeile: -3 unter $X_1 \Rightarrow X_1$ aufnehmen; minimaler Quotient $\min\{8/1, 10/2, 10/1\} = 5 \Rightarrow Z_2$ verlässt die Basis.

Die Tableaufolge

Eine künstliche Variable, die die Basis verlässt, wird **gesperrt** und im Tableau mit einem Strich markiert:

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	Z_1	Z_2	b
Z_1	1	1	-1	0	0	1	0	8
Z_2	2	1	0	-1	0	0	1	10
Y_3	1	1	0	0	1	0	0	10
F	-2	-1	0	0	0	0	0	0
Z	-3	-2	1	1	0	0	0	-18

Start mit Pivot [2]: X_1 hinein, Z_2 hinaus.

Die Tableaufolge

Eine künstliche Variable, die die Basis verlässt, wird **gesperrt** und im Tableau mit einem Strich markiert:

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	Z_1	Z_2	b
Z_1	0	$1/2$	-1	$1/2$	0	1	-	3
X_1	1	$1/2$	0	$-1/2$	0	0	-	5
Y_3	0	$1/2$	0	$1/2$	1	0	-	5
F	0	0	0	-1	0	0	-	10
Z	0	$-1/2$	1	$-1/2$	0	0	-	-3

Z-Zeile: $-1/2$ unter X_2 und Y_2 ; Quotienten für Y_2 : $\min\{3/\frac{1}{2}, 5/\frac{1}{2}\} = 6$
 $\Rightarrow$ Pivot $[1/2]$, Z_1 hinaus.

Die Tableaufolge

Eine künstliche Variable, die die Basis verlässt, wird **gesperrt** und im Tableau mit einem Strich markiert:

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	Z_1	Z_2	b
Y_2	0	1	-2	1	0	–	–	6
X_1	1	1	-1	0	0	–	–	8
Y_3	0	0	1	0	1	–	–	2
F	0	1	-2	0	0	–	–	16
Z	0	0	0	0	0	–	–	0

$Z = 0$: **Phase 1 beendet!** Jetzt wählt die F -Zeile: -2 unter Y_1 , einziger positiver Quotient $2/1 \Rightarrow$ Pivot $[1]$, Y_3 hinaus.

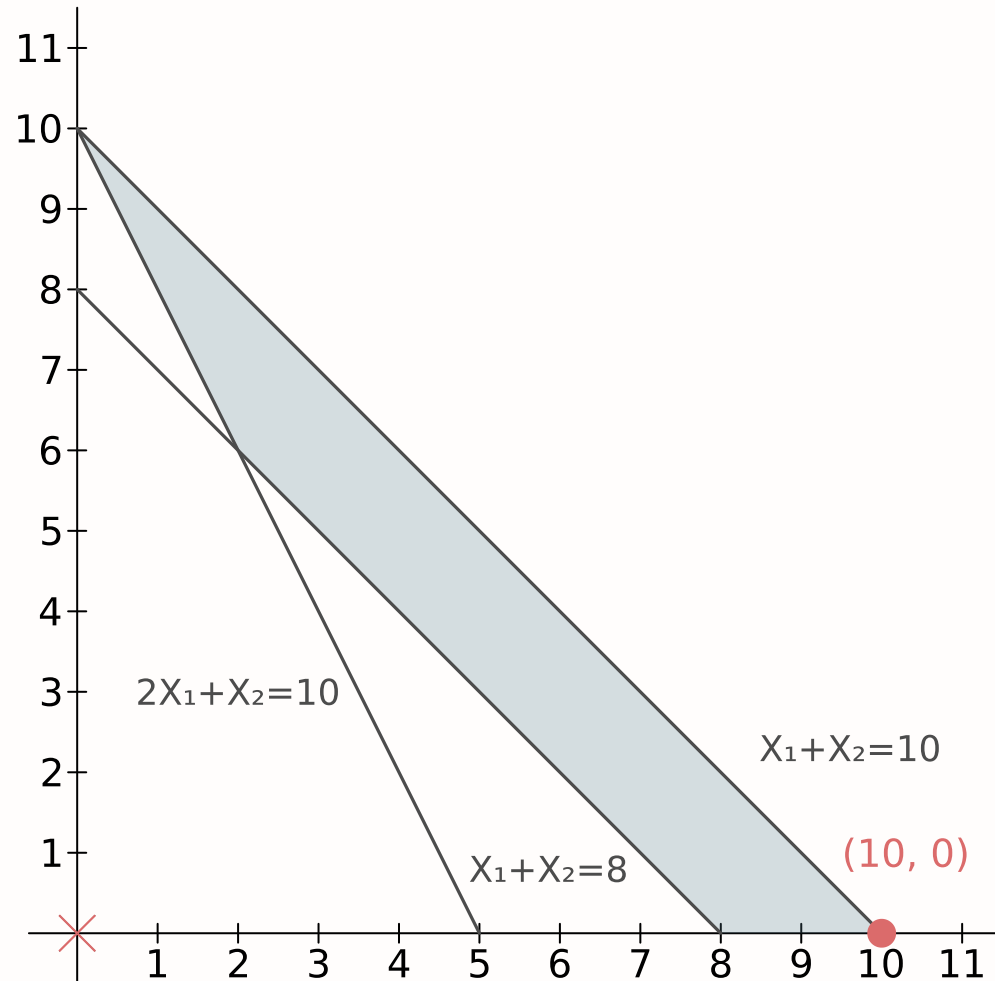
Die Tableaufolge

Eine künstliche Variable, die die Basis verlässt, wird **gesperrt** und im Tableau mit einem Strich markiert:

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	Z_1	Z_2	b
Y_2	0	1	0	1	2	–	–	10
X_1	1	1	0	0	1	–	–	10
Y_1	0	0	1	0	1	–	–	2
F	0	1	0	0	2	–	–	20

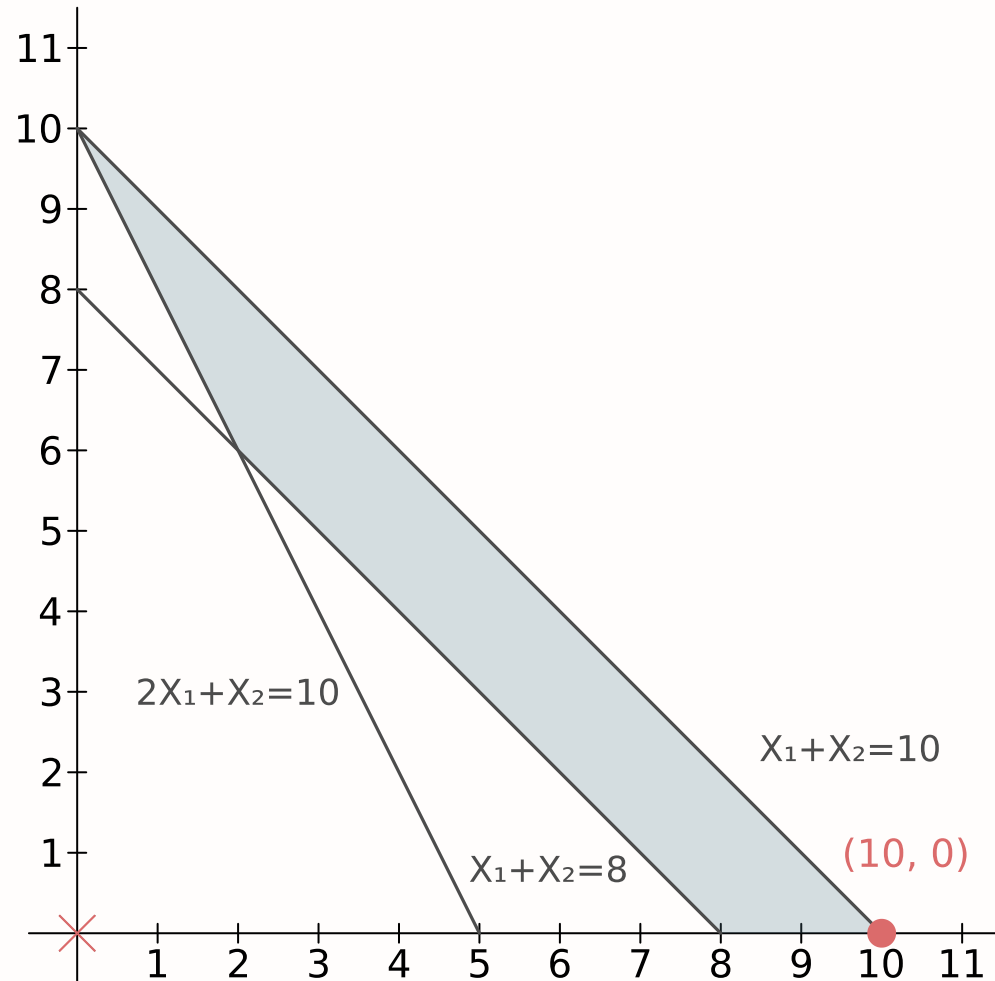
Alle F -Zeilen-Einträge sind ≥ 0 , also **optimal**: $X_1^* = 10$, $X_2^* = 0$, $F^* = 20$.

Grafische Kontrolle



Das Optimum liegt im **Eckpunkt** (10,0), auf der Restriktion $X_1 + X_2 \leq 10$.

Grafische Kontrolle



Das Optimum liegt im **Eckpunkt** $(10, 0)$, auf der Restriktion $X_1 + X_2 \leq 10$.

! **Optimale Lösung**

$$X_1^* = 10, \quad X_2^* = 0, \quad F^* = 20$$

Dualität

Zwei Sichten, ein Problem

Zu jedem **primalen** Problem gehört ein **duales** Problem.

Grundregel

Ein primales **Minimierungsproblem** mit ausschließlich $\geq$ -Relationen wird zu einem dualen **Maximierungsproblem** mit ausschließlich $\leq$ -Relationen.

Herleitung über die **beste untere Schranke** für den optimalen Zielwert des Minimierungsproblems.

Eine untere Schranke für F^*

Primales Problem

$$\min F = 5X_1 + 9X_2$$

$$X_1 + X_2 \geq 20$$

$$X_1 + 3X_2 \geq 30$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Aus der zweiten Restriktion ($\times 3$):

$$3X_1 + 9X_2 \geq 90$$

Eine untere Schranke für F^*

Primales Problem

$$\min F = 5X_1 + 9X_2$$

$$X_1 + X_2 \geq 20$$

$$X_1 + 3X_2 \geq 30$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Aus der zweiten Restriktion ($\times 3$):

$$3X_1 + 9X_2 \geq 90$$

Da $X_1 \geq 0$:

$$F = 5X_1 + 9X_2 \geq 3X_1 + 9X_2 \geq 90$$

Eine untere Schranke für F^*

Primales Problem

$$\min F = 5X_1 + 9X_2$$

$$X_1 + X_2 \geq 20$$

$$X_1 + 3X_2 \geq 30$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Aus der zweiten Restriktion ($\times 3$):

$$3X_1 + 9X_2 \geq 90$$

Da $X_1 \geq 0$:

$$F = 5X_1 + 9X_2 \geq 3X_1 + 9X_2 \geq 90$$

$$\Rightarrow \underline{F} = 90$$

Eine untere Schranke für F^*

Primales Problem

$$\min F = 5X_1 + 9X_2$$

$$X_1 + X_2 \geq 20$$

$$X_1 + 3X_2 \geq 30$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Aus der zweiten Restriktion ($\times 3$):

$$3X_1 + 9X_2 \geq 90$$

Da $X_1 \geq 0$:

$$F = 5X_1 + 9X_2 \geq 3X_1 + 9X_2 \geq 90$$

$$\Rightarrow \underline{F} = 90$$

Frage: Geht es noch besser als 90?

Eine untere Schranke für F^*

Primales Problem

$$\min F = 5X_1 + 9X_2$$

$$X_1 + X_2 \geq 20$$

$$X_1 + 3X_2 \geq 30$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Aus der zweiten Restriktion ($\times 3$):

$$3X_1 + 9X_2 \geq 90$$

Da $X_1 \geq 0$:

$$F = 5X_1 + 9X_2 \geq 3X_1 + 9X_2 \geq 90$$

$$\Rightarrow \underline{F} = 90$$

Frage: Geht es noch besser als 90?



Gleich ausprobieren

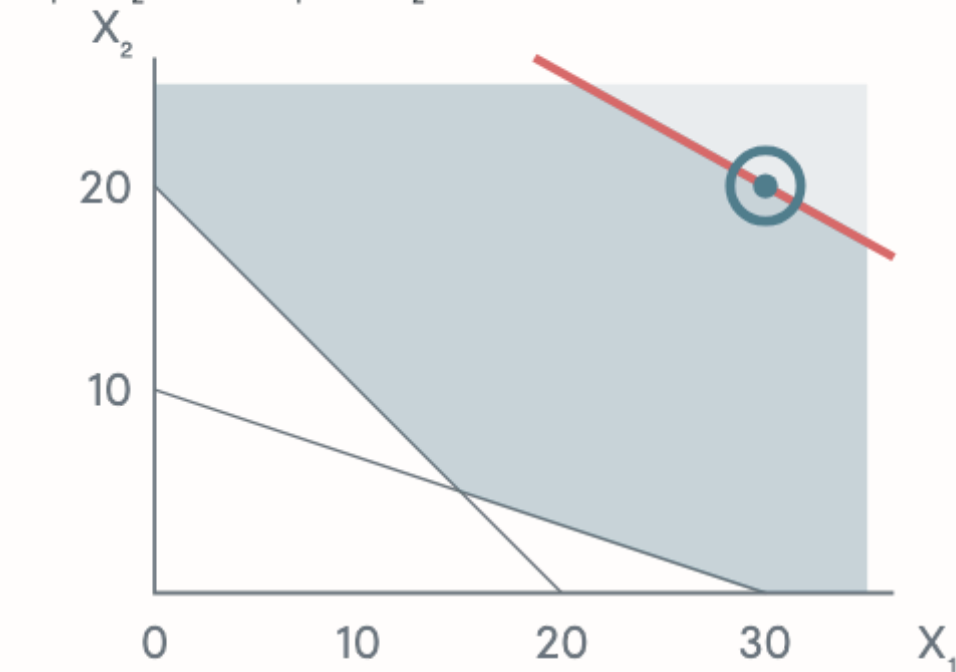
Auf der nächsten Folie suchen Sie beides selbst: links einen Plan, der F^* von oben begrenzt, rechts Gewichte für die Restriktionen, die F^* von unten begrenzen. Wie klein bekommen Sie die Lücke?

Sie sind dran

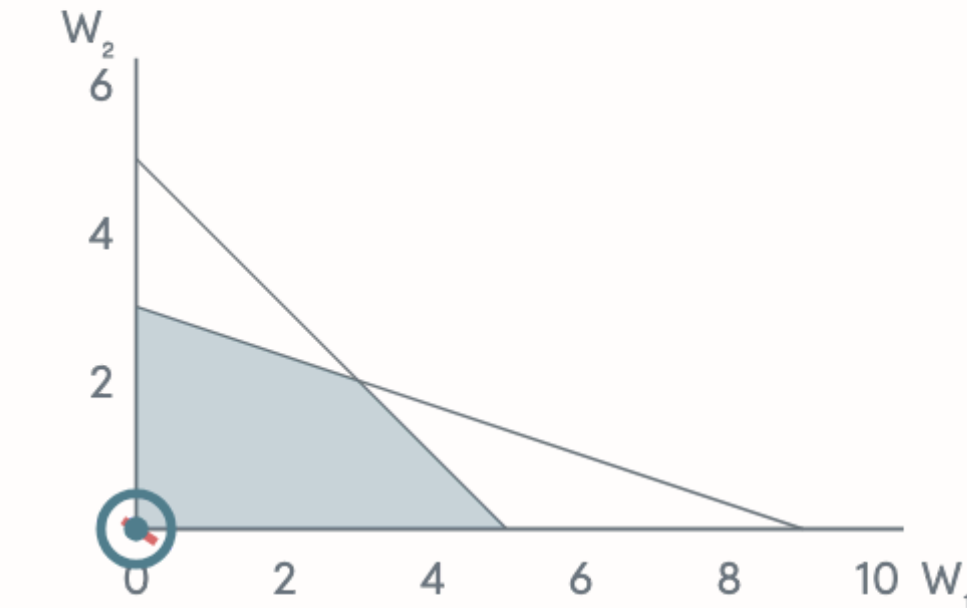
Ziehen Sie links den Plan und rechts die Gewichte: Beide begrenzen F^* , der eine von oben, der andere von unten. Machen Sie die Lücke zwischen beiden möglichst klein.

$$\min 5 X_1 + 9 X_2$$
$$X_1 + X_2 \geq 20, X_1 + 3 X_2 \geq 30$$

$$\text{Schranke } 20 W_1 + 30 W_2$$



Kosten des Plans: 330 €
zulässig: obere Schranke für F^*



$0 \geq 0$
gültig: $0 \leq 5$ und $0 \leq 9$

Schranke 0 €

Plan 330 €



Eigener Plan

330 € Lücke

Bereit: „Optimieren“
vergleicht den Plan
mit dem besten.

Optimieren

Reset

Neu

Bessere Schranken

Primales Problem

$$\min F = 5X_1 + 9X_2$$

$$X_1 + X_2 \geq 20$$

$$X_1 + 3X_2 \geq 30$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Erste Restriktion $\times 5$:

$$5X_1 + 5X_2 \geq 100 \Rightarrow \underline{F} = 100$$

Bessere Schranken

Primales Problem

$$\min F = 5X_1 + 9X_2$$

$$X_1 + X_2 \geq 20$$

$$X_1 + 3X_2 \geq 30$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Erste Restriktion $\times 5$:

$$5X_1 + 5X_2 \geq 100 \Rightarrow \underline{F} = 100$$

4 $\times$ erste + 1 $\times$ zweite Restriktion:

$$5X_1 + 7X_2 \geq 110 \Rightarrow \underline{F} = 110$$

Bessere Schranken

Primales Problem

$$\min F = 5X_1 + 9X_2$$

$$X_1 + X_2 \geq 20$$

$$X_1 + 3X_2 \geq 30$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Erste Restriktion $\times 5$:

$$5X_1 + 5X_2 \geq 100 \Rightarrow \underline{F} = 100$$

4 $\times$ erste + 1 $\times$ zweite Restriktion:

$$5X_1 + 7X_2 \geq 110 \Rightarrow \underline{F} = 110$$

Frage: Welche Linearkombination liefert die schärfste Schranke?

Die beste Linearkombination

Faktoren $W_1, W_2 \geq 0$ für die beiden Restriktionen:

$$(W_1 + W_2)X_1 + (W_1 + 3W_2)X_2 \geq 20W_1 + 30W_2$$

Die beste Linearkombination

Faktoren $W_1, W_2 \geq 0$ für die beiden Restriktionen:

$$(W_1 + W_2)X_1 + (W_1 + 3W_2)X_2 \geq 20W_1 + 30W_2$$

- Damit die rechte Seite eine untere Schranke für $F = 5X_1 + 9X_2$ bleibt, dürfen die Koeffizienten F **nicht überschreiten**:

$$W_1 + W_2 \leq 5, \quad W_1 + 3W_2 \leq 9$$

Die beste Linearkombination

Faktoren $W_1, W_2 \geq 0$ für die beiden Restriktionen:

$$(W_1 + W_2)X_1 + (W_1 + 3W_2)X_2 \geq 20W_1 + 30W_2$$

- Damit die rechte Seite eine untere Schranke für $F = 5X_1 + 9X_2$ bleibt, dürfen die Koeffizienten F **nicht überschreiten**:

$$W_1 + W_2 \leq 5, \quad W_1 + 3W_2 \leq 9$$

- Ein negatives W_i würde die $\geq$ -Relation umkehren, die Schranke ginge verloren $\Rightarrow W_1, W_2 \geq 0$.

Die beste Linearkombination

Faktoren $W_1, W_2 \geq 0$ für die beiden Restriktionen:

$$(W_1 + W_2)X_1 + (W_1 + 3W_2)X_2 \geq 20W_1 + 30W_2$$

- Damit die rechte Seite eine untere Schranke für $F = 5X_1 + 9X_2$ bleibt, dürfen die Koeffizienten F **nicht überschreiten**:

$$W_1 + W_2 \leq 5, \quad W_1 + 3W_2 \leq 9$$

- Ein negatives W_i würde die $\geq$ -Relation umkehren, die Schranke ginge verloren $\Rightarrow W_1, W_2 \geq 0$.
- Die **beste** Schranke maximiert $20W_1 + 30W_2$.

Primales und duales Problem

Primal

$$\begin{aligned}\min \quad & 5X_1 + 9X_2 \\ & X_1 + X_2 \geq 20 \\ & X_1 + 3X_2 \geq 30 \\ & X_1, X_2 \geq 0\end{aligned}$$

Dual

$$\begin{aligned}\max \quad & 20W_1 + 30W_2 \\ & W_1 + W_2 \leq 5 \\ & W_1 + 3W_2 \leq 9 \\ & W_1, W_2 \geq 0\end{aligned}$$

Primales und duales Problem

Primal

$$\begin{aligned}\min \quad & 5X_1 + 9X_2 \\ & X_1 + X_2 \geq 20 \\ & X_1 + 3X_2 \geq 30 \\ & X_1, X_2 \geq 0\end{aligned}$$

Dual

$$\begin{aligned}\max \quad & 20W_1 + 30W_2 \\ & W_1 + W_2 \leq 5 \\ & W_1 + 3W_2 \leq 9 \\ & W_1, W_2 \geq 0\end{aligned}$$

Frage: Kommt Ihnen das duale Problem bekannt vor?

Ein alter Bekannter

Das duale Problem ist (bis auf die Variablennamen) genau das **Frachtführer-Problem** aus Vorlesung 1:

$$\max 20X_1 + 30X_2, \quad X_1 + X_2 \leq 5, \quad X_1 + 3X_2 \leq 9$$

Ein alter Bekannter

Das duale Problem ist (bis auf die Variablennamen) genau das **Frachtführer-Problem** aus Vorlesung 1:

$$\max 20X_1 + 30X_2, \quad X_1 + X_2 \leq 5, \quad X_1 + 3X_2 \leq 9$$

Dessen Optimum kennen Sie bereits aus Vorlesung 2: $F^* = 120$ bei $(3, 2)$.

Ein alter Bekannter

Das duale Problem ist (bis auf die Variablennamen) genau das **Frachtführer-Problem** aus Vorlesung 1:

$$\max 20X_1 + 30X_2, \quad X_1 + X_2 \leq 5, \quad X_1 + 3X_2 \leq 9$$

Dessen Optimum kennen Sie bereits aus Vorlesung 2: $F^* = 120$ bei $(3, 2)$.

! Starke Dualität

$$\min F_{\text{primal}} = \max F_{\text{dual}} = 120$$

Die W_i sind die **Schattenpreise** der primalen Restriktionen. Beide Sichten treffen sich im selben Optimum.

Dualisierungsregeln

Restriktionen unterschiedlichen Typs werden zunächst auf $\geq$ gebracht:

Dualisierungsregeln

Restriktionen unterschiedlichen Typs werden zunächst auf $\geq$ gebracht:

- $\leq$ -Restriktion $\Rightarrow$ mit -1 multiplizieren ($\geq$).

Dualisierungsregeln

Restriktionen unterschiedlichen Typs werden zunächst auf $\geq$ gebracht:

- $\leq$ -Restriktion $\Rightarrow$ mit -1 multiplizieren ($\geq$).
- $=$ -Restriktion $\Rightarrow$ in zwei Ungleichungen ($\geq$ **und** $\leq$) aufspalten.

Dualisierungsregeln

Restriktionen unterschiedlichen Typs werden zunächst auf $\geq$ gebracht:

- $\leq$ -Restriktion $\Rightarrow$ mit -1 multiplizieren ($\geq$).
- $=$ -Restriktion $\Rightarrow$ in zwei Ungleichungen ($\geq$ **und** $\leq$) aufspalten.
- Die Dualvariable einer $=$ -Restriktion wird dadurch **unbeschränkt** ($W_3 = W_3^+ - W_3^-$).

Dualisierungsregeln

Restriktionen unterschiedlichen Typs werden zunächst auf $\geq$ gebracht:

- $\leq$ -Restriktion $\Rightarrow$ mit -1 multiplizieren ($\geq$).
- $=$ -Restriktion $\Rightarrow$ in zwei Ungleichungen ($\geq$ **und** $\leq$) aufspalten.
- Die Dualvariable einer $=$ -Restriktion wird dadurch **unbeschränkt** ($W_3 = W_3^+ - W_3^-$).

So lässt sich **jedes** LOP dualisieren.

Gemischte Relationen

Ein Beispiel mit allen drei Relationstypen:

$$\min F = 5X_1 \quad +2X_2 - X_3$$

$$2X_1 + 3X_2 + X_3 \geq 20$$

$$2X_1 + 3X_2 - X_3 \leq 30$$

$$X_1 + 5X_2 + 2X_3 = 40$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Gemischte Relationen

Ein Beispiel mit allen drei Relationstypen:

$$\min F = 5X_1 \quad + 2X_2 - X_3$$

$$2X_1 + 3X_2 + X_3 \geq 20$$

$$2X_1 + 3X_2 - X_3 \leq 30$$

$$X_1 + 5X_2 + 2X_3 = 40$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Frage: Wie bringen wir alles auf $\geq$?

Transformation auf $\geq$

Die Regeln von eben, angewandt:

Restriktion	wird zu	Dualvariable
$2X_1 + 3X_2 + X_3 \geq 20$	(bleibt)	W_1
$2X_1 + 3X_2 - X_3 \leq 30$	$-2X_1 - 3X_2 + X_3 \geq -30$	W_2
$X_1 + 5X_2 + 2X_3 = 40$	$X_1 + 5X_2 + 2X_3 \geq 40$	W_3^+
	$-X_1 - 5X_2 - 2X_3 \geq -40$	W_3^-

Transformation auf $\geq$

Die Regeln von eben, angewandt:

Restriktion	wird zu	Dualvariable
$2X_1 + 3X_2 + X_3 \geq 20$	(bleibt)	W_1
$2X_1 + 3X_2 - X_3 \leq 30$	$-2X_1 - 3X_2 + X_3 \geq -30$	W_2
$X_1 + 5X_2 + 2X_3 = 40$	$X_1 + 5X_2 + 2X_3 \geq 40$	W_3^+
	$-X_1 - 5X_2 - 2X_3 \geq -40$	W_3^-

Die $=$ -Restriktion liefert **zwei** Dualvariablen, zusammengefasst $W_3 = W_3^+ - W_3^-$, im Vorzeichen **unbeschränkt**.

Das duale Problem

Primal

$$\min 5X_1 \quad +2X_2 - X_3$$

$$2X_1 + 3X_2 + X_3 \geq 20$$

$$2X_1 + 3X_2 - X_3 \leq 30$$

$$X_1 + 5X_2 + 2X_3 = 40$$

Dual

$$\max 20W_1 - 30W_2 + 40W_3$$

$$2W_1 - 2W_2 + W_3 \leq 5$$

$$3W_1 - 3W_2 + 5W_3 \leq 2$$

$$W_1 + W_2 + 2W_3 \leq -1$$

Das duale Problem

Primal

$$\begin{aligned} \min \quad & 5X_1 + 2X_2 - X_3 \\ & 2X_1 + 3X_2 + X_3 \geq 20 \\ & 2X_1 + 3X_2 - X_3 \leq 30 \\ & X_1 + 5X_2 + 2X_3 = 40 \end{aligned}$$

Dual

$$\begin{aligned} \max \quad & 20W_1 - 30W_2 + 40W_3 \\ & 2W_1 - 2W_2 + W_3 \leq 5 \\ & 3W_1 - 3W_2 + 5W_3 \leq 2 \\ & W_1 + W_2 + 2W_3 \leq -1 \end{aligned}$$

$W_1, W_2 \geq 0$; W_3 unbeschränkt. Für die Rechnung nutzen wir $W_3 = W_3^+ - W_3^-$ mit $W_3^+, W_3^- \geq 0$.

Startaufstellung

Mit Schlupfvariablen Y_1, Y_2, Y_3 wird die dritte Zeile zu
 $W_1 + W_2 + 2W_3^+ - 2W_3^- + Y_3 = -1$.

Startaufstellung

Mit Schlupfvariablen Y_1, Y_2, Y_3 wird die dritte Zeile zu $W_1 + W_2 + 2W_3^+ - 2W_3^- + Y_3 = -1$.

Die Startlösung $Y_3 = -1$ ist **unzulässig**.

Frage: Welches Verfahren kennt genau diese Situation?

Startaufstellung

Mit Schlupfvariablen Y_1, Y_2, Y_3 wird die dritte Zeile zu $W_1 + W_2 + 2W_3^+ - 2W_3^- + Y_3 = -1$.

Die Startlösung $Y_3 = -1$ ist **unzulässig**.

Frage: Welches Verfahren kennt genau diese Situation?

Der **duale Simplex** aus Vorlesung 3: Pivotzeile ist die unzulässige Zeile Y_3 .

Ein Pivot genügt

BV	W_1	W_2	W_3^+	W_3^-	Y_1	Y_2	Y_3	b
Y_1	2	-2	1	-1	1	0	0	5
Y_2	3	-3	5	-5	0	1	0	2
Y_3	1	1	2	-2	0	0	1	-1
F	-20	30	-40	40	0	0	0	0

Einzigster negativer Koeffizient der Zeile Y_3 : -2 unter W_3^- $\Rightarrow$ Pivot $[-2]$.

Ein Pivot genügt

BV	W_1	W_2	W_3^+	W_3^-	Y_1	Y_2	Y_3	b
Y_1	$3/2$	$-5/2$	0	0	1	0	$-1/2$	$11/2$
Y_2	$1/2$	$-11/2$	0	0	0	1	$-5/2$	$9/2$
W_3^-	$-1/2$	$-1/2$	-1	1	0	0	$-1/2$	$1/2$
F	0	50	0	0	0	0	20	-20

Alle $b_i \geq 0$ **und** alle F -Zeilen-Einträge ≥ 0 , also ist das Tableau bereits **optimal**: $F^* = -20$.

Warum die F -Zeile X^* enthält

Für den Zielfunktionswert des dualen Problems gilt (Vorlesung 2):

$$F = \sum_i b_i \pi_i = 5 \pi_1 + 2 \pi_2 - 1 \pi_3$$

Warum die F -Zeile X^* enthält

Für den Zielfunktionswert des dualen Problems gilt (Vorlesung 2):

$$F = \sum_i b_i \pi_i = 5 \pi_1 + 2 \pi_2 - 1 \pi_3$$

Die primale Zielfunktion hat dieselben Koeffizienten:

$$\min F = 5X_1 + 2X_2 - X_3$$

Warum die F -Zeile X^* enthält

Für den Zielfunktionswert des dualen Problems gilt (Vorlesung 2):

$$F = \sum_i b_i \pi_i = 5 \pi_1 + 2 \pi_2 - 1 \pi_3$$

Die primale Zielfunktion hat dieselben Koeffizienten:

$$\min F = 5X_1 + 2X_2 - X_3$$

Die rechten Seiten des dualen Problems sind die Zielfunktionskoeffizienten des primalen: π_i , der Wert unter Y_i , steht an der Stelle von X_i .

Primallösung ablesen

Die F -Zeile unter den **Schlupfvariablen** liefert die primale Lösung:

$$-\bar{c}_{Y_1} = X_1^* = 0, \quad -\bar{c}_{Y_2} = X_2^* = 0, \quad -\bar{c}_{Y_3} = X_3^* = 20$$

Primallösung ablesen

Die F -Zeile unter den **Schlupfvariablen** liefert die primale Lösung:

$$-\bar{c}_{Y_1} = X_1^* = 0, \quad -\bar{c}_{Y_2} = X_2^* = 0, \quad -\bar{c}_{Y_3} = X_3^* = 20$$

Kontrolle im primalen Problem: $F = 5 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 20 = -20 \checkmark$ und $X_1 + 5X_2 + 2X_3 = 40 \checkmark$.

Primallösung ablesen

Die F -Zeile unter den **Schlupfvariablen** liefert die primale Lösung:

$$-\bar{c}_{Y_1} = X_1^* = 0, \quad -\bar{c}_{Y_2} = X_2^* = 0, \quad -\bar{c}_{Y_3} = X_3^* = 20$$

Kontrolle im primalen Problem: $F = 5 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 20 = -20 \checkmark$ und $X_1 + 5X_2 + 2X_3 = 40 \checkmark$.

! Zwei Probleme, eine Rechnung

Das duale Optimaltableau enthält die **primale** Lösung gleich mit. Sie lösen immer beide Probleme auf einmal.

Kontrolle mit Julia

Der Solver übernimmt Phase 1

HiGHS findet selbst eine zulässige Startlösung:

```
1 using JuMP, HiGHS
2
3 modell = Model(HiGHS.Optimizer)
4 set_silent(modell)
5
6 @variable(modell, X1 >= 0)
7 @variable(modell, X2 >= 0)
8 @objective(modell, Max, 2X1 + X2)
9 @constraint(modell, X1 + X2 >= 8)
10 @constraint(modell, 2X1 + X2 >= 10)
11 @constraint(modell, X1 + X2 <= 10)
12
13 optimize!(modell)
14 println("F* = ", objective_value(modell),
15         " mit X1 = ", value(X1), ", X2 = ", value(X2))
```

Der Solver übernimmt Phase 1

HiGHS findet selbst eine zulässige Startlösung:

```
1 using JuMP, HiGHS
2
3 modell = Model(HiGHS.Optimizer)
4 set_silent(modell)
5
6 @variable(modell, X1 >= 0)
7 @variable(modell, X2 >= 0)
8 @objective(modell, Max, 2X1 + X2)
9 @constraint(modell, X1 + X2 >= 8)
10 @constraint(modell, 2X1 + X2 >= 10)
11 @constraint(modell, X1 + X2 <= 10)
12
13 optimize!(modell)
14 println("F* = ", objective_value(modell),
15         " mit X1 = ", value(X1), ", X2 = ", value(X2))
```

F* = 20.0 mit X1 = 10.0, X2 = 0.0

Dualwerte direkt aus JuMP

Für das primale Minimierungsproblem liefert JuMP die **Dualwerte** der Restriktionen, genau die W_i :

```
1  modell = Model(HiGHS.Optimizer)
2  set_silent(modell)
3
4  @variable(modell, X1 >= 0)
5  @variable(modell, X2 >= 0)
6  @objective(modell, Min, 5X1 + 9X2)
7  @constraint(modell, r1, X1 + X2 >= 20)
8  @constraint(modell, r2, X1 + 3X2 >= 30)
9
10 optimize!(modell)
11 println("F* = ", objective_value(modell))
12 println("W1 = ", round(dual(r1), digits = 2),
13         ", W2 = ", round(dual(r2), digits = 2))
```

Dualwerte direkt aus JuMP

Für das primale Minimierungsproblem liefert JuMP die **Dualwerte** der Restriktionen, genau die W_i :

```
1  modell = Model(HiGHS.Optimizer)
2  set_silent(modell)
3
4  @variable(modell, X1 >= 0)
5  @variable(modell, X2 >= 0)
6  @objective(modell, Min, 5X1 + 9X2)
7  @constraint(modell, r1, X1 + X2 >= 20)
8  @constraint(modell, r2, X1 + 3X2 >= 30)
9
10 optimize!(modell)
11 println("F* = ", objective_value(modell))
12 println("W1 = ", round(dual(r1), digits = 2),
13         ", W2 = ", round(dual(r2), digits = 2))
```

F* = 120.0

W1 = 3.0, W2 = 2.0

Kontrolle des Beispiels

Auch das Beispiel mit gemischten Relationen bestätigt HiGHS:

```
1 modell = Model(HiGHS.Optimizer)
2 set_silent(modell)
3
4 @variable(modell, X[1:3] >= 0)
5 @objective(modell, Min, 5X[1] + 2X[2] - X[3])
6 @constraint(modell, 2X[1] + 3X[2] + X[3] >= 20)
7 @constraint(modell, 2X[1] + 3X[2] - X[3] <= 30)
8 @constraint(modell, X[1] + 5X[2] + 2X[3] == 40)
9
10 optimize!(modell)
11 println("F* = ", objective_value(modell),
12         " mit X = ", round.(value.(X), digits = 2))
```

Kontrolle des Beispiels

Auch das Beispiel mit gemischten Relationen bestätigt HiGHS:

```
1 modell = Model(HiGHS.Optimizer)
2 set_silent(modell)
3
4 @variable(modell, X[1:3] >= 0)
5 @objective(modell, Min, 5X[1] + 2X[2] - X[3])
6 @constraint(modell, 2X[1] + 3X[2] + X[3] >= 20)
7 @constraint(modell, 2X[1] + 3X[2] - X[3] <= 30)
8 @constraint(modell, X[1] + 5X[2] + 2X[3] == 40)
9
10 optimize!(modell)
11 println("F* = ", objective_value(modell),
12         " mit X = ", round.(value.(X), digits = 2))
```

F* = -20.0 mit X = [0.0, 0.0, 20.0]

Zusammenfassung

Das Wichtigste auf einen Blick

Das Wichtigste auf einen Blick

- Fehlt eine zulässige Startlösung, schaffen **künstliche Variablen** eine. Die **Zweiphasenmethode** eliminiert sie in Phase 1.

Das Wichtigste auf einen Blick

- Fehlt eine zulässige Startlösung, schaffen **künstliche Variablen** eine. Die **Zweiphasenmethode** eliminiert sie in Phase 1.
- Zu jedem primalen Problem gehört ein **duales**; es entsteht aus der besten unteren Schranke.

Das Wichtigste auf einen Blick

- Fehlt eine zulässige Startlösung, schaffen **künstliche Variablen** eine. Die **Zweiphasenmethode** eliminiert sie in Phase 1.
- Zu jedem primalen Problem gehört ein **duales**; es entsteht aus der besten unteren Schranke.
- **Starke Dualität**: primales Minimum = duales Maximum.

Das Wichtigste auf einen Blick

- Fehlt eine zulässige Startlösung, schaffen **künstliche Variablen** eine. Die **Zweiphasenmethode** eliminiert sie in Phase 1.
- Zu jedem primalen Problem gehört ein **duales**; es entsteht aus der besten unteren Schranke.
- **Starke Dualität**: primales Minimum = duales Maximum.
- Das duale Optimaltableau liefert die **primale** Lösung gleich mit.

Literatur

Literaturverzeichnis

- Domschke, Wolfgang, Andreas Drexl, Robert Klein, und Armin Scholl. 2015. *Einführung in Operations Research*. 9. Aufl. Springer Gabler. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-48216-2>.
- Vlček, Tobias, Knut Haase, Matthes Koch, Lena Dolz, Anneke Weygandt, und Jan Pape. 2023. „Controlling Passenger Flows into Metro Systems to Mitigate Overcrowding During Large-Scale Events“. *Working Paper*.