

Vorlesung 04: Dualität & Zweiphasen

Grundlagen Operations Research

Zweiphasenmethode

Kein einfacher Start

T. Vlček, K. Haase, M. Koch, L. Dolz, A. Weygandt, und J. Pape [1]

Kein zulässiger Startpunkt

Bisher lieferte $X_1 = X_2 = 0$ stets eine zulässige Startlösung. Bei $\geq$ -Restriktionen gilt das **nicht** mehr:

$$\max F = 2X_1 + X_2$$

$$X_1 + X_2 \geq 8$$

$$2X_1 + X_2 \geq 10$$

$$X_1 + X_2 \leq 10$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Mit Schlupfvariablen:

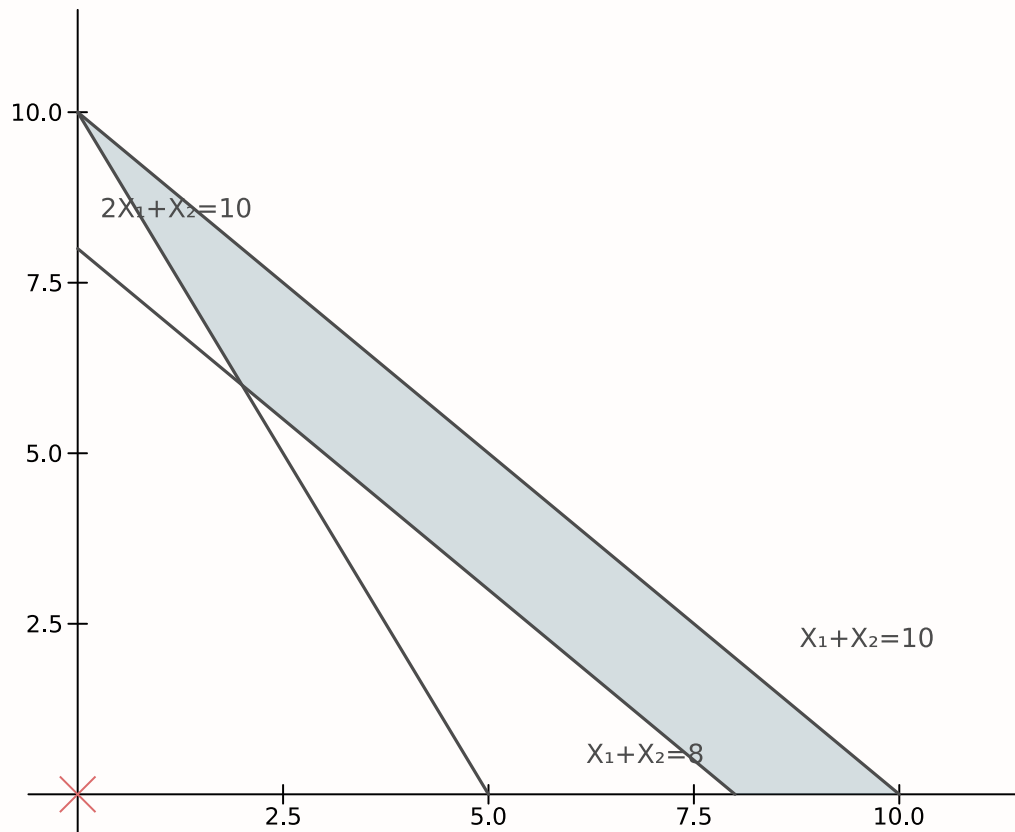
$$X_1 + X_2 - Y_1 = 8$$

$$2X_1 + X_2 - Y_2 = 10$$

$$X_1 + X_2 + Y_3 = 10$$

Für $X_1 = X_2 = 0$ folgt $Y_1 = -8, Y_2 = -10$: **unzulässig**.

Der zulässige Bereich



Der Ursprung (x) liegt **außerhalb** des zulässigen Bereichs.

Frage: **Wo darf der Simplex dann starten?**

Er braucht erst eine **zulässige Basislösung**. Genau die liefert Phase 1.

Künstliche Variablen

Wir fügen in die $\geq$ -Zeilen **künstliche Variablen** $Z_1, Z_2 \geq 0$ ein:

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 - Y_1 + Z_1 &= 8 \\ 2X_1 + X_2 - Y_2 + Z_2 &= 10 \\ X_1 + X_2 + Y_3 &= 10 \end{aligned}$$

Jetzt ist $Z_1 = 8, Z_2 = 10, Y_3 = 10$ eine **formal** zulässige Startlösung.

Inhaltlich zulässig erst, wenn $Z_1 = Z_2 = 0$: die künstlichen Variablen müssen wieder aus der Basis.

Grundsätzliches Vorgehen

💡 Idee der Zweiphasenmethode

1. **Phase 1:** künstliche Variablen eliminieren $\Rightarrow$ zulässige Lösung.
2. **Phase 2:** primaler Simplex $\Rightarrow$ optimale Lösung.

In Phase 1 minimieren wir die Summe der künstlichen Variablen:

$$\text{Minimiere } Z = \sum_i Z_i \Leftrightarrow \text{Maximiere } Z = - \sum_i Z_i$$

Zielfunktion der ersten Phase

Wir drücken Z durch die Nichtbasisvariablen aus:

$$Z = - \underbrace{(8 - X_1 - X_2 + Y_1)}_{Z_1} - \underbrace{(10 - 2X_1 - X_2 + Y_2)}_{Z_2}$$
$$Z = -18 + 3X_1 + 2X_2 - Y_1 - Y_2$$

Diese Hilfszielfunktion steuert Phase 1, bis $Z = 0$ erreicht ist.

Alternative: M-Methode

i M-Methode

Statt einer eigenen Phase 1 bestraft die **M-Methode** die künstlichen Variablen direkt in der Originalzielfunktion: $\max F = 2X_1 + X_2 - MZ_1 - MZ_2$ mit sehr großem M .

Eine Phase statt zwei, aber numerisch heikler. Wir rechnen mit der Zweiphasenmethode.

Ablauf im Tableau

Phase 1 startet mit Z_1, Z_2, Y_3 in der Basis; die F -Zeile wird nur **mitgeführt**, die Pivotwahl trifft die Z -Zeile:

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	Z_1	Z_2	b
Z_1	1	1	-1	0	0	1	0	8
Z_2	2	1	0	-1	0	0	1	10
Y_3	1	1	0	0	1	0	0	10
F	-2	-1	0	0	0	0	0	0
Z	-3	-2	1	1	0	0	0	-18

Z -Zeile: -3 unter $X_1 \Rightarrow X_1$ aufnehmen; minimaler Quotient $\min\{8/1, 10/2, 10/1\} = 5 \Rightarrow Z_2$ verlässt die Basis.

Die Tableaufolge

Eine künstliche Variable, die die Basis verlässt, wird **gesperrt** und im Tableau mit einem Strich markiert:

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	Z_1	Z_2	b
Z_1	1	1	-1	0	0	1	0	8
Z_2	2	1	0	-1	0	0	1	10
Y_3	1	1	0	0	1	0	0	10
F	-2	-1	0	0	0	0	0	0
Z	-3	-2	1	1	0	0	0	-18

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	Z_1	Z_2	b
Z_1	0	1/2	-1	1/2	0	1	-	3
X_1	1	1/2	0	-1/2	0	0	-	5
Y_3	0	1/2	0	1/2	1	0	-	5
F	0	0	0	-1	0	0	-	10
Z	0	-1/2	1	-1/2	0	0	-	-3

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	Z_1	Z_2	b
Y_2	0	1	-2	1	0	-	-	6
X_1	1	1	-1	0	0	-	-	8
Y_3	0	0	1	0	1	-	-	2
F	0	1	-2	0	0	-	-	16
Z	0	0	0	0	0	-	-	0

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	Z_1	Z_2	b
Y_2	0	1	0	1	2	-	-	10
X_1	1	1	0	0	1	-	-	10
Y_1	0	0	1	0	1	-	-	2
F	0	1	0	0	2	-	-	20

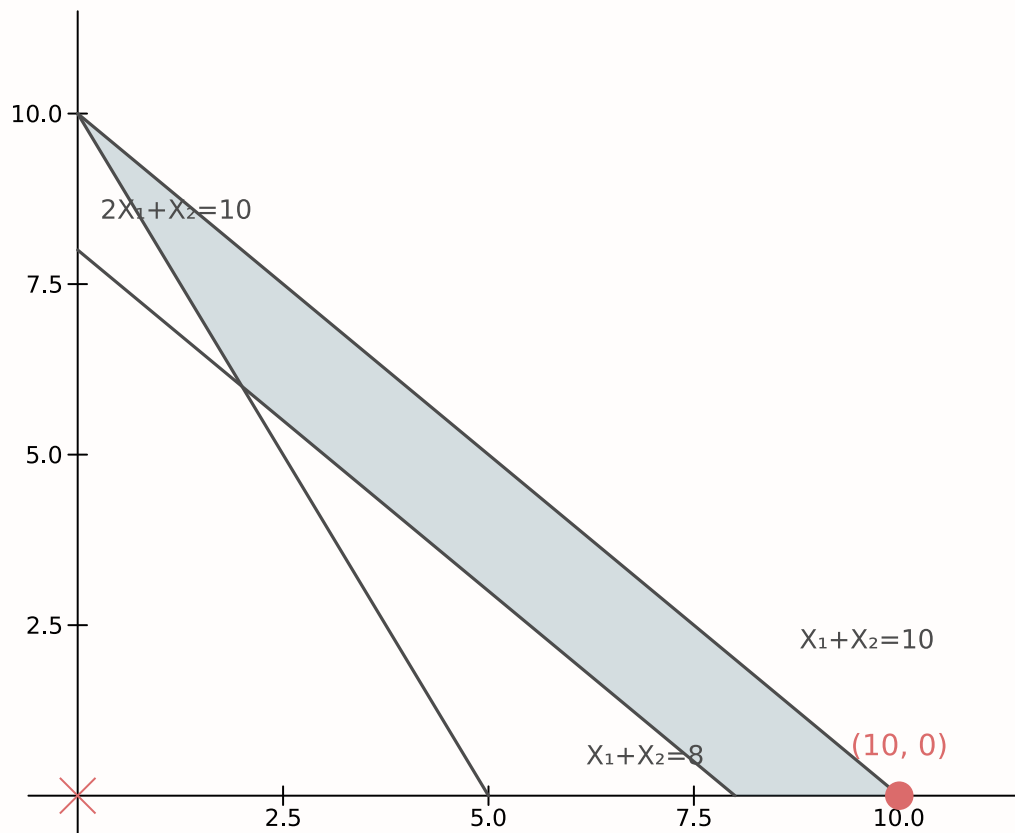
Start mit Pivot [2]: X_1 hinein, Z_2 hinaus.

Z -Zeile: $-1/2$ unter X_2 und Y_2 ; Quotienten für Y_2 : $\min\{3/\frac{1}{2}, 5/\frac{1}{2}\} = 6 \Rightarrow$ Pivot [1/2], Z_1 hinaus.

$Z = 0$: **Phase 1 beendet!** Jetzt wählt die F -Zeile: -2 unter Y_1 , einziger positiver Quotient $2/1 \Rightarrow$ Pivot [1], Y_3 hinaus.

Alle F -Zeilen-Einträge sind ≥ 0 , also **optimal**: $X_1^* = 10$, $X_2^* = 0$, $F^* = 20$.

Grafische Kontrolle



Das Optimum liegt im **Eckpunkt** $(10, 0)$, auf der Restriktion $X_1 + X_2 \leq 10$.

! Optimale Lösung

$$X_1^* = 10, \quad X_2^* = 0, \quad F^* = 20$$

Dualität

Zwei Sichten, ein Problem

Zu jedem **primalen** Problem gehört ein **duales** Problem.

i Grundregel

Ein primales **Minimierungsproblem** mit ausschließlich $\geq$ -Relationen wird zu einem dualen **Maximierungsproblem** mit ausschließlich $\leq$ -Relationen.

Herleitung über die **beste untere Schranke** für den optimalen Zielwert des Minimierungsproblems.

Eine untere Schranke für F^*

Primales Problem

$$\min F = 5X_1 + 9X_2$$

$$X_1 + X_2 \geq 20$$

$$X_1 + 3X_2 \geq 30$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Aus der zweiten Restriktion ($\times 3$):

$$3X_1 + 9X_2 \geq 90$$

Da $X_1 \geq 0$:

$$F = 5X_1 + 9X_2 \geq 3X_1 + 9X_2 \geq 90$$

$$\Rightarrow \underline{F} = 90$$

Frage: **Geht es noch besser als 90?**

Bessere Schranken

Primales Problem

$$\min F = 5X_1 + 9X_2$$

$$X_1 + X_2 \geq 20$$

$$X_1 + 3X_2 \geq 30$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Erste Restriktion $\times 5$:

$$5X_1 + 5X_2 \geq 100 \Rightarrow \underline{F} = 100$$

$4 \times$ erste $+ 1 \times$ zweite Restriktion:

$$5X_1 + 7X_2 \geq 110 \Rightarrow \underline{F} = 110$$

Frage: **Welche Linearkombination liefert die schärfste Schranke?**

Die beste Linearkombination

Faktoren $W_1, W_2 \geq 0$ für die beiden Restriktionen:

$$(W_1 + W_2)X_1 + (W_1 + 3W_2)X_2 \geq 20W_1 + 30W_2$$

- Damit die rechte Seite eine untere Schranke für $F = 5X_1 + 9X_2$ bleibt, dürfen die Koeffizienten F **nicht überschreiten**:

$$W_1 + W_2 \leq 5, \quad W_1 + 3W_2 \leq 9$$

- Ein negatives W_i würde die $\geq$ -Relation umkehren, die Schranke ginge verloren $\Rightarrow W_1, W_2 \geq 0$.
- Die **beste** Schranke maximiert $20W_1 + 30W_2$.

Primales und duales Problem

i Primal

$$\begin{aligned}\min & 5X_1 + 9X_2 \\ & X_1 + X_2 \geq 20 \\ & X_1 + 3X_2 \geq 30 \\ & X_1, X_2 \geq 0\end{aligned}$$

💡 Dual

$$\begin{aligned}\max & 20W_1 + 30W_2 \\ & W_1 + W_2 \leq 5 \\ & W_1 + 3W_2 \leq 9 \\ & W_1, W_2 \geq 0\end{aligned}$$

Frage: **Kommt Ihnen das duale Problem bekannt vor?**

Ein alter Bekannter

Das duale Problem ist (bis auf die Variablennamen) genau das **Frachtführer-Problem** aus Vorlesung 1:

$$\max 20X_1 + 30X_2, \quad X_1 + X_2 \leq 5, \quad X_1 + 3X_2 \leq 9$$

Dessen Optimum kennen Sie bereits aus Vorlesung 2: $F^* = 120$ bei $(3, 2)$.

! Starke Dualität

$$\min F_{\text{primal}} = \max F_{\text{dual}} = 120$$

Die W_i sind die **Schattenpreise** der primalen Restriktionen. Beide Sichten treffen sich im selben Optimum.

Dualisierungsregeln

Restriktionen unterschiedlichen Typs werden zunächst auf $\geq$ gebracht:

- $\leq$ -Restriktion $\Rightarrow$ mit -1 multiplizieren ($\geq$).
- $=$ -Restriktion $\Rightarrow$ in zwei Ungleichungen ($\geq$ **und** $\leq$) aufspalten.
- Die Dualvariable einer $=$ -Restriktion wird dadurch **unbeschränkt** ($W_3 = W_3^+ - W_3^-$).

So lässt sich **jedes** LOP dualisieren.

Gemischte Relationen

Ein Beispiel mit allen drei Relationstypen:

$$\begin{aligned}
\min F &= 5X_1 + 2X_2 - X_3 \\
2X_1 + 3X_2 + X_3 &\geq 20 \\
2X_1 + 3X_2 - X_3 &\leq 30 \\
X_1 + 5X_2 + 2X_3 &= 40 \\
X_1, X_2, X_3 &\geq 0
\end{aligned}$$

Frage: **Wie bringen wir alles auf $\geq$?**

Transformation auf $\geq$

Die Regeln von eben, angewandt:

Restriktion	wird zu	Dualvariable
$2X_1 + 3X_2 + X_3 \geq 20$	(bleibt)	W_1
$2X_1 + 3X_2 - X_3 \leq 30$	$-2X_1 - 3X_2 + X_3 \geq -30$	W_2
$X_1 + 5X_2 + 2X_3 = 40$	$X_1 + 5X_2 + 2X_3 \geq 40$	W_3^+
	$-X_1 - 5X_2 - 2X_3 \geq -40$	W_3^-

Die $=$ -Restriktion liefert **zwei** Dualvariablen, zusammengefasst $W_3 = W_3^+ - W_3^-$, im Vorzeichen **unbeschränkt**.

Das duale Problem

i Primal

$$\begin{aligned}
\min & 5X_1 + 2X_2 - X_3 \\
& 2X_1 + 3X_2 + X_3 \geq 20 \\
& 2X_1 + 3X_2 - X_3 \leq 30 \\
& X_1 + 5X_2 + 2X_3 = 40
\end{aligned}$$

💡 Dual

$$\begin{aligned}
\max & 20W_1 - 30W_2 + 40W_3 \\
& 2W_1 - 2W_2 + W_3 \leq 5 \\
& 3W_1 - 3W_2 + 5W_3 \leq 2 \\
& W_1 + W_2 + 2W_3 \leq -1
\end{aligned}$$

$W_1, W_2 \geq 0$; W_3 unbeschränkt. Für die Rechnung nutzen wir $W_3 = W_3^+ - W_3^-$ mit $W_3^+, W_3^- \geq 0$.

Startaufstellung

Mit Schlupfvariablen Y_1, Y_2, Y_3 wird die dritte Zeile zu $W_1 + W_2 + 2W_3^+ - 2W_3^- + Y_3 = -1$.

Die Startlösung $Y_3 = -1$ ist **unzulässig**.

Frage: **Welches Verfahren kennt genau diese Situation?**

Der **duale Simplex** aus Vorlesung 3: Pivotzeile ist die unzulässige Zeile Y_3 .

Ein Pivot genügt

BV	W_1	W_2	W_3^+	W_3^-	Y_1	Y_2	Y_3	b
Y_1	2	-2	1	-1	1	0	0	5
Y_2	3	-3	5	-5	0	1	0	2
Y_3	1	1	2	-2	0	0	1	-1
F	-20	30	-40	40	0	0	0	0

BV	W_1	W_2	W_3^+	W_3^-	Y_1	Y_2	Y_3	b
Y_1	3/2	-5/2	0	0	1	0	-1/2	11/2
Y_2	1/2	-11/2	0	0	0	1	-5/2	9/2
W_3^-	-1/2	-1/2	-1	1	0	0	-1/2	1/2
F	0	50	0	0	0	0	20	-20

Einziger negativer Koeffizient der Zeile Y_3 : -2 unter $W_3^- \Rightarrow$ Pivot $[-2]$.

Alle $b_i \geq 0$ **und** alle F -Zeilen-Einträge ≥ 0 , also ist das Tableau bereits **optimal**: $F^* = -20$.

Primallösung ablesen

Die F -Zeile unter den **Schlupfvariablen** liefert die primale Lösung:

$$-\bar{c}_{Y_1} = X_1^* = 0, \quad -\bar{c}_{Y_2} = X_2^* = 0, \quad -\bar{c}_{Y_3} = X_3^* = 20$$

Kontrolle im primalen Problem: $F = 5 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 20 = -20 \checkmark$ und $X_1 + 5X_2 + 2X_3 = 40 \checkmark$.

! Zwei Probleme, eine Rechnung

Das duale Optimaltableau enthält die **primale** Lösung gleich mit. Sie lösen immer beide Probleme auf einmal.

Kontrolle mit Julia

Der Solver übernimmt Phase 1

HiGHS findet selbst eine zulässige Startlösung:

```
using JuMP, HiGHS
```

```

modell = Model(HiGHS.Optimizer)
set_silent(modell)

@variable(modell, X1 >= 0)
@variable(modell, X2 >= 0)
@objective(modell, Max, 2X1 + X2)
@constraint(modell, X1 + X2 >= 8)
@constraint(modell, 2X1 + X2 >= 10)
@constraint(modell, X1 + X2 <= 10)

optimize!(modell)
println("F* = ", objective_value(modell),
        " mit X1 = ", value(X1), ", X2 = ", value(X2))

```

```
F* = 20.0 mit X1 = 10.0, X2 = 0.0
```

Dualwerte direkt aus JuMP

Für das primale Minimierungsproblem liefert JuMP die **Dualwerte** der Restriktionen, genau die W_i :

```

modell = Model(HiGHS.Optimizer)
set_silent(modell)

@variable(modell, X1 >= 0)
@variable(modell, X2 >= 0)
@objective(modell, Min, 5X1 + 9X2)
@constraint(modell, r1, X1 + X2 >= 20)
@constraint(modell, r2, X1 + 3X2 >= 30)

optimize!(modell)
println("F* = ", objective_value(modell))
println("W1 = ", round(dual(r1), digits = 2),
        ", W2 = ", round(dual(r2), digits = 2))

```

```
F* = 120.0
W1 = 3.0, W2 = 2.0
```

Kontrolle des Beispiels

Auch das Beispiel mit gemischten Relationen bestätigt HiGHS:

```

modell = Model(HiGHS.Optimizer)
set_silent(modell)

@variable(modell, X[1:3] >= 0)
@objective(modell, Min, 5X[1] + 2X[2] - X[3])

```

```
@constraint(modell, 2X[1] + 3X[2] + X[3] >= 20)
@constraint(modell, 2X[1] + 3X[2] - X[3] <= 30)
@constraint(modell, X[1] + 5X[2] + 2X[3] == 40)

optimize!(modell)
println("F* = ", objective_value(modell),
        " mit X = ", round.(value.(X), digits = 2))
```

```
F* = -20.0 mit X = [0.0, 0.0, 20.0]
```

Zusammenfassung

Das Wichtigste auf einen Blick

- Fehlt eine zulässige Startlösung, schaffen **künstliche Variablen** eine. Die **Zweiphasenmethode** eliminiert sie in Phase 1.
- Zu jedem primalen Problem gehört ein **duales**; es entsteht aus der besten unteren Schranke.
- **Starke Dualität**: primales Minimum = duales Maximum.
- Das duale Optimaltableau liefert die **primale** Lösung gleich mit.

Literatur

Literaturverzeichnis

Bibliografie

- [1] T. Vlček, K. Haase, M. Koch, L. Dolz, A. Weygandt, und J. Pape, „Controlling Passenger Flows into Metro Systems to Mitigate Overcrowding during large-scale Events“, *Working Paper*, 2023.