

Vorlesung 03: Dualer Simplex

Grundlagen Operations Research

Prof. Dr. Knut Haase

Motivation

Eine zusätzliche Auflage

Worum geht es heute?

Wir kennen den **primalen Simplex**. Doch was tun, wenn nach der Lösung eine **neue Nebenbedingung** hinzukommt?

Worum geht es heute?

Wir kennen den **primalen Simplex**. Doch was tun, wenn nach der Lösung eine **neue Nebenbedingung** hinzukommt?

- Alles **von vorn** rechnen? Bei großen Problemen enorm aufwendig.

Worum geht es heute?

Wir kennen den **primalen Simplex**. Doch was tun, wenn nach der Lösung eine **neue Nebenbedingung** hinzukommt?

- Alles **von vorn** rechnen? Bei großen Problemen enorm aufwendig.
- Besser: auf der **optimalen Zwischenlösung aufbauen**.

Worum geht es heute?

Wir kennen den **primalen Simplex**. Doch was tun, wenn nach der Lösung eine **neue Nebenbedingung** hinzukommt?

- Alles **von vorn** rechnen? Bei großen Problemen enorm aufwendig.
- Besser: auf der **optimalen Zwischenlösung aufbauen**.

Das leistet der **duale Simplex-Algorithmus**: er ist auch Grundlage der **ganzzahligen Optimierung** (Vorlesung 08).

Wiederholung

Das Optimaltableau

Der primale Simplex lieferte für den Frachtführer:

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	b
X_1	1	0	$3/2$	$-1/2$	3
X_2	0	1	$-1/2$	$1/2$	2
F	0	0	15	5	120

Das Optimaltableau

Der primale Simplex lieferte für den Frachtführer:

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	b
X_1	1	0	$3/2$	$-1/2$	3
X_2	0	1	$-1/2$	$1/2$	2
F	0	0	15	5	120

! Optimale Lösung

$$X_1^* = 3, \quad X_2^* = 2, \quad F^* = 120$$

Eine neue Nebenbedingung

Aus ladungstechnischen Gründen soll Auftrag 1 **nicht mehr Paletten** umfassen als Auftrag 2:

$$X_1 \leq X_2$$

Eine neue Nebenbedingung

Aus ladungstechnischen Gründen soll Auftrag 1 **nicht mehr Paletten** umfassen als Auftrag 2:

$$X_1 \leq X_2$$

Mit einer weiteren Schlupfvariablen $Y_3 \geq 0$:

$$X_1 - X_2 + Y_3 = 0$$

Eine neue Nebenbedingung

Aus ladungstechnischen Gründen soll Auftrag 1 **nicht mehr Paletten** umfassen als Auftrag 2:

$$X_1 \leq X_2$$

Mit einer weiteren Schlupfvariablen $Y_3 \geq 0$:

$$X_1 - X_2 + Y_3 = 0$$

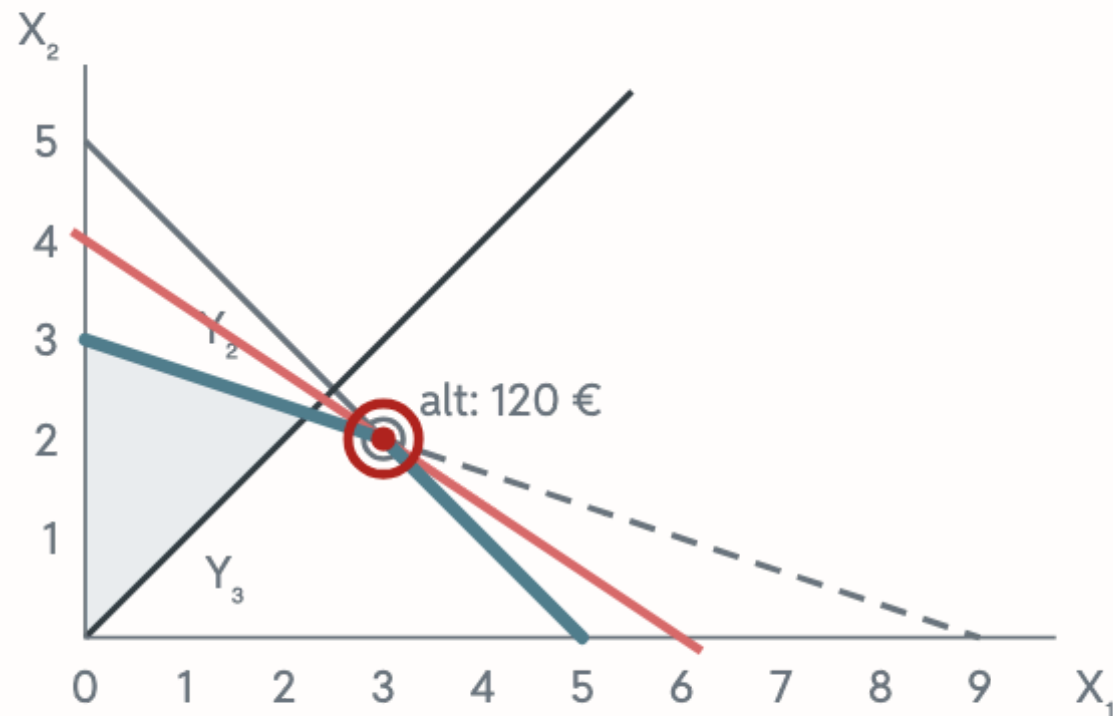


Gleich ausprobieren

Auf der nächsten Folie liegt der bisherige Plan (3,2) außerhalb des neuen Bereichs. Wohin schieben Sie ihn, und wie viel Erlös kostet die Auflage?

Sie sind dran

Eine neue Auflage schneidet den Plan ab: Der Punkt liegt jetzt außerhalb. Ziehen Sie ihn in den Bereich, dorthin, wo der Erlös am höchsten ist.



$$F = 20 X_1 + 30 X_2$$

X_1 3 Paletten Auftrag 1

X_2 2 Paletten Auftrag 2

Y_1 0 freie Stellplätze

Y_2 0 freie Tonnen

Y_3 -1 Vorsprung Auftrag 2

Die Auflage ist verletzt: nicht zulässig.



Eigener Plan 120 €

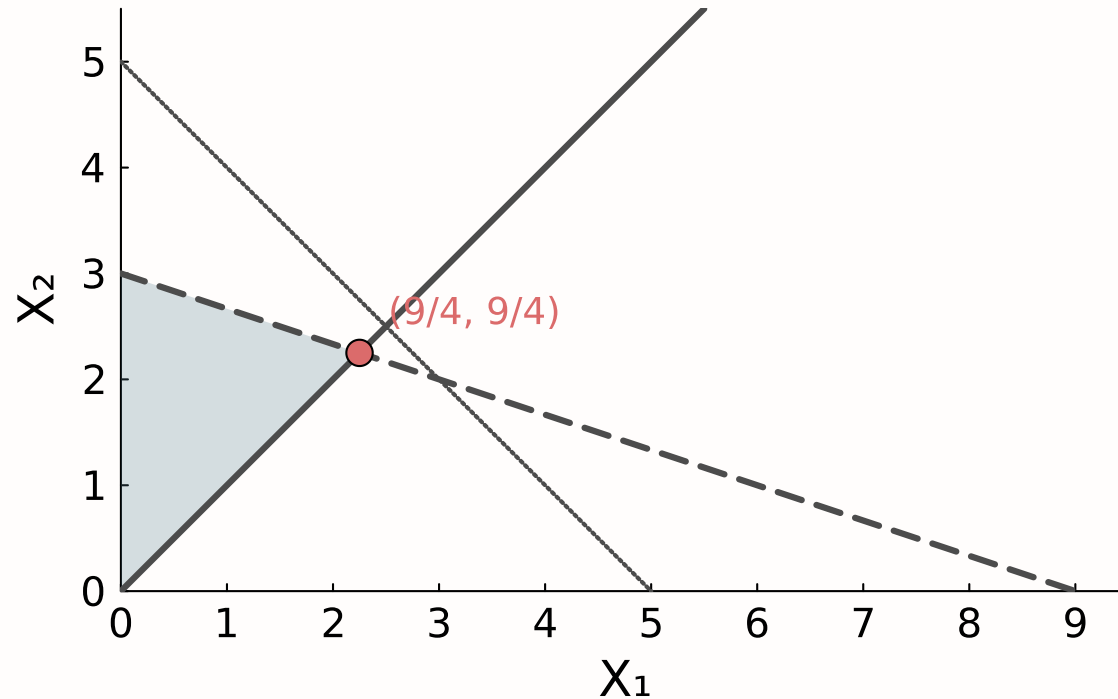
Bereit: „Optimieren“
vergleicht den Plan
mit dem besten.

Optimieren

Reset

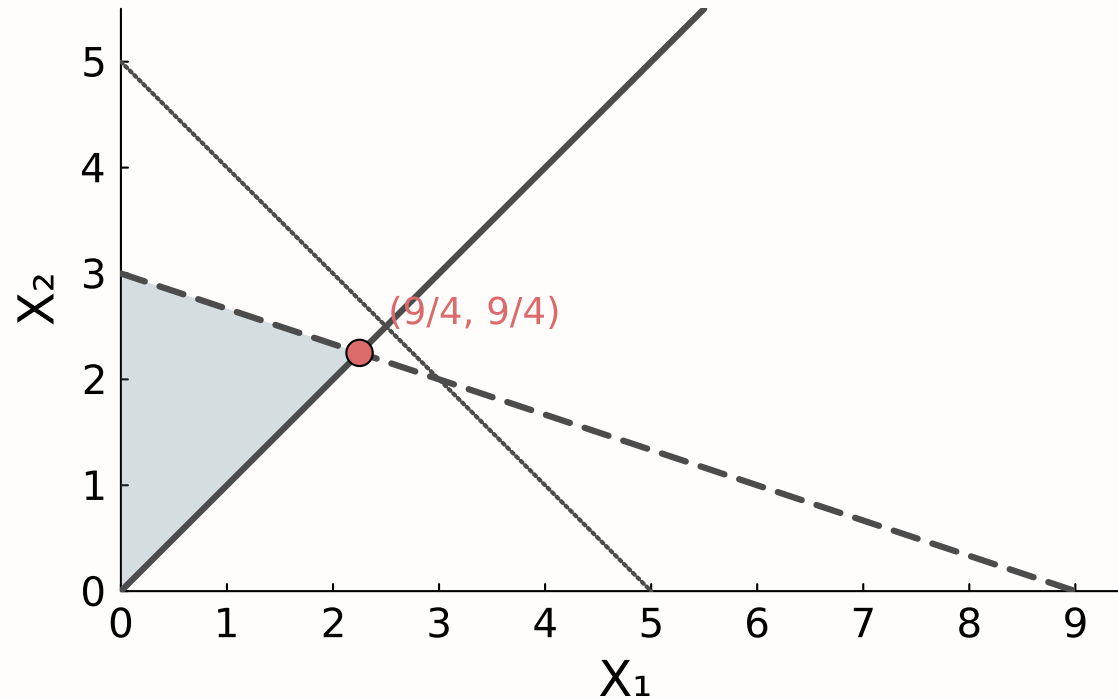
Neu

Grafische Deutung



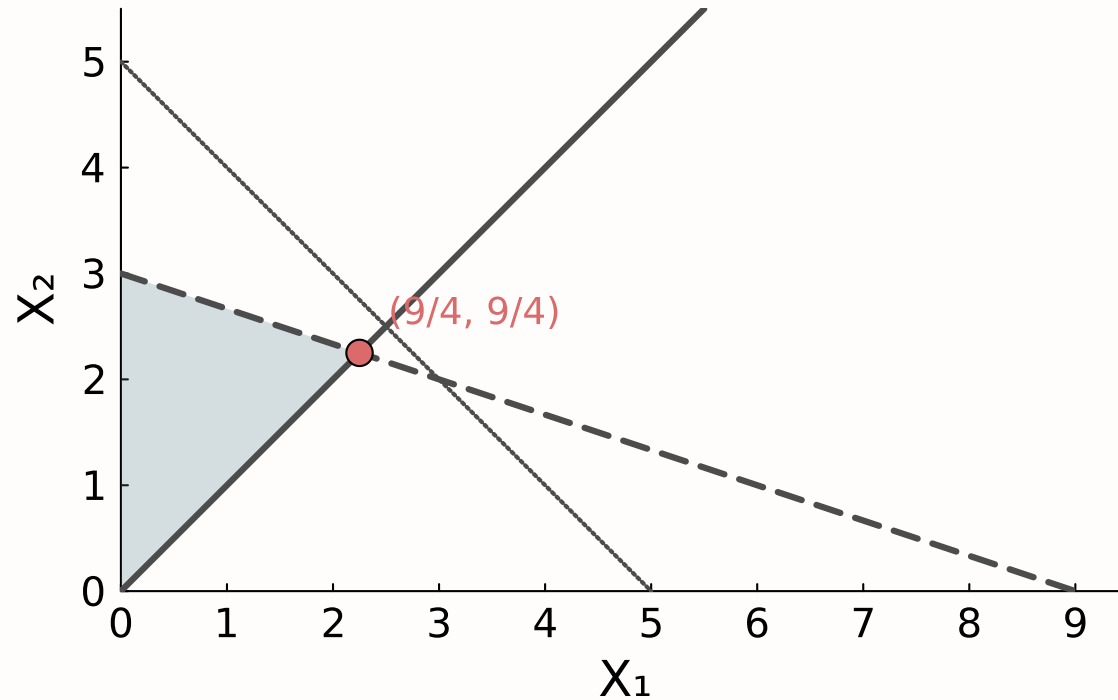
Die Grenzgerade $X_1 = X_2$ der neuen Restriktion (durchgezogen) schneidet den zulässigen Bereich zum Dreieck.

Grafische Deutung



Die Grenzgerade $X_1 = X_2$ der neuen Restriktion (durchgezogen) schneidet den zulässigen Bereich zum Dreieck. Das neue Optimum liegt bei $(9/4, 9/4)$.

Grafische Deutung



Die Grenzgerade $X_1 = X_2$ der neuen Restriktion (durchgezogen) schneidet den zulässigen Bereich zum Dreieck.

Das neue Optimum liegt bei $(9/4, 9/4)$.

$X_1 + X_2 \leq 5$ (gepunktet) ist jetzt **redundant**: es könnte entfallen.

Lösung mit dem primalen Simplex

Von vorn gerechnet, mit der Zeile $X_1 - X_2 + Y_3 = 0$ im Ausgangstableau:

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	b
Y_1	1	1	1	0	0	5
Y_2	1	3	0	1	0	9
Y_3	1	-1	0	0	1	0
F	-20	-30	0	0	0	0

Pivotspalte X_2 (-30); die -1 in Zeile Y_3 zählt nicht, $\min\{5/1, 9/3\} = 3$
 $\Rightarrow$ Pivot [3].

Lösung mit dem primalen Simplex

Von vorn gerechnet, mit der Zeile $X_1 - X_2 + Y_3 = 0$ im Ausgangstableau:

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	b
Y_1	$2/3$	0	1	$-1/3$	0	2
X_2	$1/3$	1	0	$1/3$	0	3
Y_3	$4/3$	0	0	$1/3$	1	3
F	-10	0	0	10	0	90

Pivotspalte X_1 (-10); $\min\{2/\frac{2}{3}, 3/\frac{1}{3}, 3/\frac{4}{3}\} = \frac{9}{4} \Rightarrow$ Pivot $[4/3]$.

Lösung mit dem primalen Simplex

Von vorn gerechnet, mit der Zeile $X_1 - X_2 + Y_3 = 0$ im Ausgangstableau:

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	b
Y_1	0	0	1	$-1/2$	$-1/2$	$1/2$
X_2	0	1	0	$1/4$	$-1/4$	$9/4$
X_1	1	0	0	$1/4$	$3/4$	$9/4$
F	0	0	0	$25/2$	$15/2$	$225/2$

Optimal nach **zwei** Iterationen: $X_1^* = X_2^* = \frac{9}{4}$, $F^* = \frac{225}{2}$. Geht das auch ohne Neustart?

Reoptimierung

Idee der Reoptimierung



Idee

Statt das erweiterte Problem neu zu lösen, **fügen wir die neue Restriktion in das vorhandene Optimaltableau ein** und stellen mit wenigen Basistauschen die Zulässigkeit wieder her.

Idee der Reoptimierung



Idee

Statt das erweiterte Problem neu zu lösen, **fügen wir die neue Restriktion in das vorhandene Optimaltableau ein** und stellen mit wenigen Basistauschen die Zulässigkeit wieder her.

- Vermeidet die Wiederholung vieler primaler Iterationen.

Idee der Reoptimierung

Idee

Statt das erweiterte Problem neu zu lösen, **fügen wir die neue Restriktion in das vorhandene Optimaltableau ein** und stellen mit wenigen Basistauschen die Zulässigkeit wieder her.

- Vermeidet die Wiederholung vieler primaler Iterationen.
- Oft genügt **eine einzige** Iteration.

Idee der Reoptimierung

Idee

Statt das erweiterte Problem neu zu lösen, **fügen wir die neue Restriktion in das vorhandene Optimaltableau ein** und stellen mit wenigen Basistauschen die Zulässigkeit wieder her.

- Vermeidet die Wiederholung vieler primaler Iterationen.
- Oft genügt **eine einzige** Iteration.
- Grundlage der Reoptimierung im **Branch & Bound** (Vorlesung 8).

Neue Restriktion einfügen

Die Zeile $X_1 - X_2 + Y_3 = 0$ kommt ins Optimaltableau:

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	b
X_1	1	0	$3/2$	$-1/2$	0	3
X_2	0	1	$-1/2$	$1/2$	0	2
Y_3	1	-1	0	0	1	0
F	0	0	15	5	0	120

Die Basisvariablen X_1, X_2 stehen noch in der neuen Zeile: sie werden mit Elementaroperationen **isoliert** (Zeile 1 subtrahieren, Zeile 2 addieren).

Neue Restriktion einfügen

Die Zeile $X_1 - X_2 + Y_3 = 0$ kommt ins Optimaltableau:

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	b
X_1	1	0	$3/2$	$-1/2$	0	3
X_2	0	1	$-1/2$	$1/2$	0	2
Y_3	0	-1	$-3/2$	$1/2$	1	-3
F	0	0	15	5	0	120

Subtraktion von Zeile 1: X_1 verschwindet aus der neuen Zeile, X_2 steht noch darin.

Neue Restriktion einfügen

Die Zeile $X_1 - X_2 + Y_3 = 0$ kommt ins Optimaltableau:

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	b
X_1	1	0	$3/2$	$-1/2$	0	3
X_2	0	1	$-1/2$	$1/2$	0	2
Y_3	0	0	-2	1	1	-1
F	0	0	15	5	0	120

Addition von Zeile 2: $Y_3 = -1 < 0$, die Basislösung ist **unzulässig**. Y_3 muss die Basis verlassen. Aber die F -Zeile ist weiter optimal!

Dualer Simplex: Pivotwahl

i Reihenfolge umgekehrt zum primalen Simplex

Erst **Pivotzeile**, dann **Pivotspalte**.

- **Pivotzeile** s : negativste b -Zeile, verletzt die Nichtnegativität am stärksten:

$$\min_{\bar{b}_i < 0} \{ \bar{b}_i \} \Rightarrow s$$

- **Pivotspalte** t : Basistausch verschlechtert F am wenigsten, nur **negative** Koeffizienten der Pivotzeile kommen infrage:

$$\max_{\bar{a}_{sj} < 0} \left\{ \frac{-\bar{c}_j}{\bar{a}_{sj}} \right\} \Rightarrow t$$

Reoptimierung durchführen

Pivotzeile Y_3 ; einziger negativer Koeffizient: -2 unter $Y_1 \Rightarrow$
Pivotelement $[-2]$:

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	b
X_1	1	0	$3/2$	$-1/2$	0	3
X_2	0	1	$-1/2$	$1/2$	0	2
Y_3	0	0	-2	1	1	-1
F	0	0	15	5	0	120

Y_1 kommt für Y_3 in die Basis: ein einziger Basistausch.

Reoptimierung durchführen

Pivotzeile Y_3 ; einziger negativer Koeffizient: -2 unter $Y_1 \Rightarrow$
Pivotelement $[-2]$:

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	b
X_1	1	0	0	$1/4$	$3/4$	$9/4$
X_2	0	1	0	$1/4$	$-1/4$	$9/4$
Y_1	0	0	1	$-1/2$	$-1/2$	$1/2$
F	0	0	0	$25/2$	$15/2$	$225/2$

Alle $\bar{b}_i \geq 0$ und F -Zeile ≥ 0 : **zulässig und optimal**, $X_1^* = X_2^* = \frac{9}{4}$,
 $F^* = \frac{225}{2} = 112,5$.

Der duale Simplex-Algorithmus

Anwendung

Eine Basislösung, die **unzulässig** ist (Basisvariablen negativ). Ist die Optimalitätsbedingung schon erfüllt, ist die erste zulässige Lösung auch optimal.

Der duale Simplex-Algorithmus

Anwendung

Eine Basislösung, die **unzulässig** ist (Basisvariablen negativ). Ist die Optimalitätsbedingung schon erfüllt, ist die erste zulässige Lösung auch optimal.

1. **Schritt 1** (Zulässigkeit herstellen): Basistausche (erst Pivotzeile, dann Pivotspalte), bis alle $\bar{b}_i \geq 0$.

Der duale Simplex-Algorithmus

Anwendung

Eine Basislösung, die **unzulässig** ist (Basisvariablen negativ). Ist die Optimalitätsbedingung schon erfüllt, ist die erste zulässige Lösung auch optimal.

1. **Schritt 1** (Zulässigkeit herstellen): Basistausche (erst Pivotzeile, dann Pivotspalte), bis alle $\bar{b}_i \geq 0$.
2. **Schritt 2** (falls zulässig, aber nicht optimal): mit dem **primalen** Simplex weiterrechnen.

Ganzzahligkeit

Nicht ganzzahlige Lösung

Die reoptimierte Lösung ist $X_2^* = 9/4$: nicht ganzzahlig.

Sinnvoll sind nur ganze Paletten. Wir spalten in zwei Teilprobleme:

$$X_2 \leq 2 \quad \text{oder} \quad X_2 \geq 3$$

Nicht ganzzahlige Lösung

Die reoptimierte Lösung ist $X_2^* = 9/4$: nicht ganzzahlig.

Sinnvoll sind nur ganze Paletten. Wir spalten in zwei Teilprobleme:

$$X_2 \leq 2 \quad \text{oder} \quad X_2 \geq 3$$

Jedes Teilproblem lässt sich per Reoptimierung (dualer Simplex) lösen: kein Neustart nötig.

Teilproblem 1 einfügen

Die Zeile $X_2 + Y_4 = 2$ wird eingefügt und X_2 isoliert, wieder wird eine b -Zeile negativ:

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	b
X_1	1	0	0	$1/4$	$3/4$	0	$9/4$
X_2	0	1	0	$1/4$	$-1/4$	0	$9/4$
Y_1	0	0	1	$-1/2$	$-1/2$	0	$1/2$
Y_4	0	1	0	0	0	1	2
F	0	0	0	$25/2$	$15/2$	0	$225/2$

Die Basisvariable X_2 steht noch in der neuen Zeile: sie wird **isoliert** (Zeile 2 subtrahieren).

Teilproblem 1 einfügen

Die Zeile $X_2 + Y_4 = 2$ wird eingefügt und X_2 isoliert, wieder wird eine b -Zeile negativ:

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	b
X_1	1	0	0	$1/4$	$3/4$	0	$9/4$
X_2	0	1	0	$1/4$	$-1/4$	0	$9/4$
Y_1	0	0	1	$-1/2$	$-1/2$	0	$1/2$
Y_4	0	0	0	$-1/4$	$1/4$	1	$-1/4$
F	0	0	0	$25/2$	$15/2$	0	$225/2$

Subtraktion von Zeile 2: $Y_4 = -1/4 < 0$. Einziger negativer Koeffizient $-1/4$ unter $Y_2 \Rightarrow$ Pivot $[-1/4]$.

Teilproblem 1 einfügen

Die Zeile $X_2 + Y_4 = 2$ wird eingefügt und X_2 isoliert, wieder wird eine b -Zeile negativ:

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	b
X_1	1	0	0	0	1	1	2
X_2	0	1	0	0	0	1	2
Y_1	0	0	1	0	-1	-2	1
Y_2	0	0	0	1	-1	-4	1
F	0	0	0	0	20	50	100

Ein Basistausch genügt: $X_1^* = 2, X_2^* = 2, F^* = 100$, **ganzzahlig!**

Teilproblem 2 einfügen

Aus $X_2 \geq 3$ wird mit -1 multipliziert die Zeile $-X_2 + Y_5 = -3$:

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	Y_5	b
X_1	1	0	0	$1/4$	$3/4$	0	$9/4$
X_2	0	1	0	$1/4$	$-1/4$	0	$9/4$
Y_1	0	0	1	$-1/2$	$-1/2$	0	$1/2$
Y_5	0	-1	0	0	0	1	-3
F	0	0	0	$25/2$	$15/2$	0	$225/2$

Die Basisvariable X_2 steht noch in der neuen Zeile: sie wird **isoliert** (Zeile 2 addieren).

Teilproblem 2 einfügen

Aus $X_2 \geq 3$ wird mit -1 multipliziert die Zeile $-X_2 + Y_5 = -3$:

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	Y_5	b
X_1	1	0	0	$1/4$	$3/4$	0	$9/4$
X_2	0	1	0	$1/4$	$-1/4$	0	$9/4$
Y_1	0	0	1	$-1/2$	$-1/2$	0	$1/2$
Y_5	0	0	0	$1/4$	$-1/4$	1	$-3/4$
F	0	0	0	$25/2$	$15/2$	0	$225/2$

Addition von Zeile 2: $Y_5 = -3/4 < 0$. Einziger negativer Koeffizient $-1/4$ unter $Y_3 \Rightarrow$ Pivot $[-1/4]$.

Teilproblem 2 einfügen

Aus $X_2 \geq 3$ wird mit -1 multipliziert die Zeile $-X_2 + Y_5 = -3$:

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	Y_5	b
X_1	1	0	0	1	0	3	0
X_2	0	1	0	0	0	-1	3
Y_1	0	0	1	-1	0	-2	2
Y_3	0	0	0	-1	1	-4	3
F	0	0	0	20	0	30	90

Ein Basistausch genügt: $X_1^* = 0$, $X_2^* = 3$, $F^* = 90$, ebenfalls **ganzzahlig**. $X_1 = 0$ steht in der Basis: eine **entartete** Basislösung (Vorlesung 5).

Zwei Teilprobleme

1. Teilproblem ($X_2 \leq 2$)

$$X_1^* = 2, X_2^* = 2, F^* = 100$$

2. Teilproblem ($X_2 \geq 3$)

$$X_1^* = 0, X_2^* = 3, F^* = 90$$

Zwei Teilprobleme

1. Teilproblem ($X_2 \leq 2$)

$$X_1^* = 2, X_2^* = 2, F^* = 100$$

2. Teilproblem ($X_2 \geq 3$)

$$X_1^* = 0, X_2^* = 3, F^* = 90$$

! Beste ganzzahlige Lösung

$X_1^* = 2, X_2^* = 2, F^* = 100$ (aus dem 1. Teilproblem).

Zwei Teilprobleme

1. Teilproblem ($X_2 \leq 2$)

$$X_1^* = 2, X_2^* = 2, F^* = 100$$

2. Teilproblem ($X_2 \geq 3$)

$$X_1^* = 0, X_2^* = 3, F^* = 90$$

! Beste ganzzahlige Lösung

$X_1^* = 2, X_2^* = 2, F^* = 100$ (aus dem 1. Teilproblem).

Dieses systematische Aufspalten ist die Grundidee von **Branch & Bound** (Vorlesung 08).

Reduzierte Kosten

Ein drittes Auftragsangebot

Ein weiterer Auftrag wird angeboten: **24 EUR** je Palette, **1 Stellplatz**, **2 Tonnen**.

$$\max F = 20X_1 + 30X_2 + 24X_3$$

$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 5$$

$$X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leq 9$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Ein drittes Auftragsangebot

Ein weiterer Auftrag wird angeboten: **24 EUR** je Palette, **1 Stellplatz**, **2 Tonnen**.

$$\max F = 20X_1 + 30X_2 + 24X_3$$

$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 5$$

$$X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leq 9$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Frage: Lohnt sich Auftrag 3 überhaupt?

Ein drittes Auftragsangebot

Ein weiterer Auftrag wird angeboten: **24 EUR** je Palette, **1 Stellplatz**, **2 Tonnen**.

$$\max F = 20X_1 + 30X_2 + 24X_3$$

$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 5$$

$$X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leq 9$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Frage: Lohnt sich Auftrag 3 überhaupt?

Das verrät ein Blick auf die **reduzierten Kosten**, ohne das Problem neu zu lösen.

Simplex-Multiplikatoren

Im Optimaltableau stehen unter den Schlupfvariablen die **Simplex-Multiplikatoren**:

$$\pi_1 = 15, \quad \pi_2 = 5$$

Sie entstehen dadurch, dass das 15-fache der 1. und das 5-fache der 2. Ausgangsgleichung zur Zielfunktion addiert wurden:

$$F = 15 \cdot 5 + 5 \cdot 9 = 120 \Rightarrow F = \sum_i \pi_i b_i$$

Definitionen

Definitionen

- c_j : Zielfunktionskoeffizient der Variablen X_j

Definitionen

- c_j : **Zielfunktionskoeffizient** der Variablen X_j
- $-\bar{c}_j$: aktueller Wert in der F -Zeile unter X_j

Definitionen

- c_j : **Zielfunktionskoeffizient** der Variablen X_j
- $-\bar{c}_j$: aktueller Wert in der F -Zeile unter X_j
- $\bar{c}_j$: **reduzierte Kosten** der Variablen X_j

Definitionen

- c_j : **Zielfunktionskoeffizient** der Variablen X_j
- $-\bar{c}_j$: aktueller Wert in der F -Zeile unter X_j
- $\bar{c}_j$: **reduzierte Kosten** der Variablen X_j
- π_i : **Simplex-Multiplikator** der Zeile i

Definitionen

- c_j : **Zielfunktionskoeffizient** der Variablen X_j
- $-\bar{c}_j$: aktueller Wert in der F -Zeile unter X_j
- $\bar{c}_j$: **reduzierte Kosten** der Variablen X_j
- π_i : **Simplex-Multiplikator** der Zeile i

Im Ausgangstableau gilt stets $\bar{c}_j = c_j$ und $\pi_i = 0$.

Reduzierte Kosten berechnen

Bei zwei Nebenbedingungen:

$$\bar{c}_j = c_j - a_{1j} \pi_1 - a_{2j} \pi_2$$

Reduzierte Kosten berechnen

Bei zwei Nebenbedingungen:

$$\bar{c}_j = c_j - a_{1j} \pi_1 - a_{2j} \pi_2$$

Für den dritten Auftrag ($c_3 = 24$, $a_{13} = 1$, $a_{23} = 2$):

$$\bar{c}_3 = 24 - 1 \cdot 15 - 2 \cdot 5 = -1$$

Probe: Auftrag 3 im Tableau

Zur Kontrolle von vorn gerechnet, mit der Spalte X_3 :

BV	X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2	b
Y_1	1	1	1	1	0	5
Y_2	1	3	2	0	1	9
F	-20	-30	-24	0	0	0

Pivotspalte X_2 (-30); $\min\{5/1, 9/3\} = 3 \Rightarrow$ Pivot [3].

Probe: Auftrag 3 im Tableau

Zur Kontrolle von vorn gerechnet, mit der Spalte X_3 :

BV	X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2	b
Y_1	2/3	0	1/3	1	-1/3	2
X_2	1/3	1	2/3	0	1/3	3
F	-10	0	-4	0	10	90

Pivotspalte X_1 (-10 vor -4); $\min\{2/\frac{2}{3}, 3/\frac{1}{3}\} = 3 \Rightarrow$ Pivot $[2/3]$.

Probe: Auftrag 3 im Tableau

Zur Kontrolle von vorn gerechnet, mit der Spalte X_3 :

BV	X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2	b
X_1	1	0	1/2	3/2	-1/2	3
X_2	0	1	1/2	-1/2	1/2	2
F	0	0	1	15	5	120

Unter X_3 steht $-\bar{c}_3 = 1$, also $\bar{c}_3 = -1$ wie berechnet. X_3 bleibt Nichtbasisvariable, das Optimum ändert sich nicht.

Optimalitätsbedingung

Reduzierte Kosten

$\bar{c}_j \leq 0$ heißt: **kein** Zielfunktionsgewinn durch Aufnahme von X_j (bei Maximierung). Optimal, wenn $\bar{c}_j \leq 0$ für **alle** j .

Wegen $\bar{c}_3 = -1 < 0$ ist Auftrag 3 **keine lohnende Alternative**.

Preisuntergrenze

Ein vierter Auftrag: $c_4 = 35$, $a_{14} = 2$, $a_{24} = 2$.

Preisuntergrenze

Ein vierter Auftrag: $c_4 = 35$, $a_{14} = 2$, $a_{24} = 2$.

Frage: Ab welchem Erlös würde sich Auftrag 4 lohnen?

Preisuntergrenze

Ein vierter Auftrag: $c_4 = 35$, $a_{14} = 2$, $a_{24} = 2$.

Frage: Ab welchem Erlös würde sich Auftrag 4 lohnen?

$$\bar{c}_4 = 35 - 2 \cdot 15 - 2 \cdot 5 = -5 < 0$$

Auftrag 4 wird **nicht** übernommen, aber ab einem Erlös $c_4 > 40$ wäre er lohnend.

Preisuntergrenze

Ein vierter Auftrag: $c_4 = 35$, $a_{14} = 2$, $a_{24} = 2$.

Frage: Ab welchem Erlös würde sich Auftrag 4 lohnen?

$$\bar{c}_4 = 35 - 2 \cdot 15 - 2 \cdot 5 = -5 < 0$$

Auftrag 4 wird **nicht** übernommen, aber ab einem Erlös $c_4 > 40$ wäre er lohnend.

⇒ Die reduzierten Kosten liefern eine **Preis- bzw. Erlösuntergrenze** für zusätzliche Aufträge.

Kontrolle mit Julia

Erweitertes Problem mit JuMP

Wir lösen das Problem mit der Zusatzrestriktion $X_1 \leq X_2$:

```
1 using JuMP, HiGHS
2
3 modell = Model(HiGHS.Optimizer)
4 set_silent(modell)
5
6 @variable(modell, X1 >= 0)    # Abnahmemenge Auftrag 1
7 @variable(modell, X2 >= 0)    # Abnahmemenge Auftrag 2
8 @objective(modell, Max, 20X1 + 30X2)
9 @constraint(modell, Paletten, X1 + X2 <= 5)
10 @constraint(modell, Gewicht, X1 + 3X2 <= 9)
11 @constraint(modell, Auflage, X1 <= X2)          # neue Nebenbedingung
12
13 optimize!(modell)
14 println("F* = ", objective_value(modell),
15         " mit X1 = ", value(X1), ", X2 = ", value(X2))
```

Erweitertes Problem mit JuMP

Wir lösen das Problem mit der Zusatzrestriktion $X_1 \leq X_2$:

```
1 using JuMP, HiGHS
2
3 modell = Model(HiGHS.Optimizer)
4 set_silent(modell)
5
6 @variable(modell, X1 >= 0) # Abnahmemenge Auftrag 1
7 @variable(modell, X2 >= 0) # Abnahmemenge Auftrag 2
8 @objective(modell, Max, 20X1 + 30X2)
9 @constraint(modell, Paletten, X1 + X2 <= 5)
10 @constraint(modell, Gewicht, X1 + 3X2 <= 9)
11 @constraint(modell, Auflage, X1 <= X2) # neue Nebenbedingung
12
13 optimize!(modell)
14 println("F* = ", objective_value(modell),
15         " mit X1 = ", value(X1), ", X2 = ", value(X2))
```

F* = 112.5 mit X1 = 2.25, X2 = 2.25

Ganzzahlige Lösung mit JuMP

Fordern wir Ganzzahligkeit, liefert HiGHS direkt die beste ganzzahlige Lösung:

```
1 set_integer(X1)
2 set_integer(X2)
3
4 optimize!(modell)
5 println("F* = ", objective_value(modell),
6         " mit X1 = ", value(X1), ", X2 = ", value(X2))
```

Ganzzahlige Lösung mit JuMP

Fordern wir Ganzzahligkeit, liefert HiGHS direkt die beste ganzzahlige Lösung:

```
1 set_integer(X1)
2 set_integer(X2)
3
4 optimize!(modell)
5 println("F* = ", objective_value(modell),
6         " mit X1 = ", value(X1), ", X2 = ", value(X2))
```

F* = 100.0 mit X1 = 2.0, X2 = 2.0

Zusammenfassung

Das Wichtigste auf einen Blick

Das Wichtigste auf einen Blick

- **Reoptimierung** baut auf dem Optimaltableau auf, statt neu zu rechnen.

Das Wichtigste auf einen Blick

- **Reoptimierung** baut auf dem Optimaltableau auf, statt neu zu rechnen.
- Der **duale Simplex** stellt Zulässigkeit her: erst Pivotzeile, dann Pivotspalte.

Das Wichtigste auf einen Blick

- **Reoptimierung** baut auf dem Optimaltableau auf, statt neu zu rechnen.
- Der **duale Simplex** stellt Zulässigkeit her: erst Pivotzeile, dann Pivotspalte.
- Nicht ganzzahlige Lösungen werden in **Teilprobleme** zerlegt (→ Branch & Bound).

Das Wichtigste auf einen Blick

- **Reoptimierung** baut auf dem Optimaltableau auf, statt neu zu rechnen.
- Der **duale Simplex** stellt Zulässigkeit her: erst Pivotzeile, dann Pivotspalte.
- Nicht ganzzahlige Lösungen werden in **Teilprobleme** zerlegt (→ Branch & Bound).
- **Reduzierte Kosten** $\bar{c}_j = c_j - \sum_i a_{ij} \pi_i$ beurteilen zusätzliche Alternativen und liefern Preisuntergrenzen.

Literatur

Literaturverzeichnis

Domschke, Wolfgang, Andreas Drexl, Robert Klein, und Armin Scholl. 2015. *Einführung in Operations Research*. 9. Aufl. Springer Gabler. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-48216-2>.