

Vorlesung 03: Dualer Simplex

Grundlagen Operations Research

Motivation

Eine zusätzliche Auflage

Worum geht es heute?

Wir kennen den **primalen Simplex**. Doch was tun, wenn nach der Lösung eine **neue Nebenbedingung** hinzukommt?

- Alles **von vorn** rechnen? Bei großen Problemen enorm aufwendig.
- Besser: auf der **optimalen Zwischenlösung aufbauen**.

Das leistet der **duale Simplex-Algorithmus**: er ist auch Grundlage der **ganzzahligen Optimierung** (Vorlesung 08).

Wiederholung

Das Optimaltableau

Der primale Simplex lieferte für den Frachtführer:

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	b
X_1	1	0	3/2	-1/2	3
X_2	0	1	-1/2	1/2	2
F	0	0	15	5	120

! Optimale Lösung

$$X_1^* = 3, \quad X_2^* = 2, \quad F^* = 120$$

Eine neue Nebenbedingung

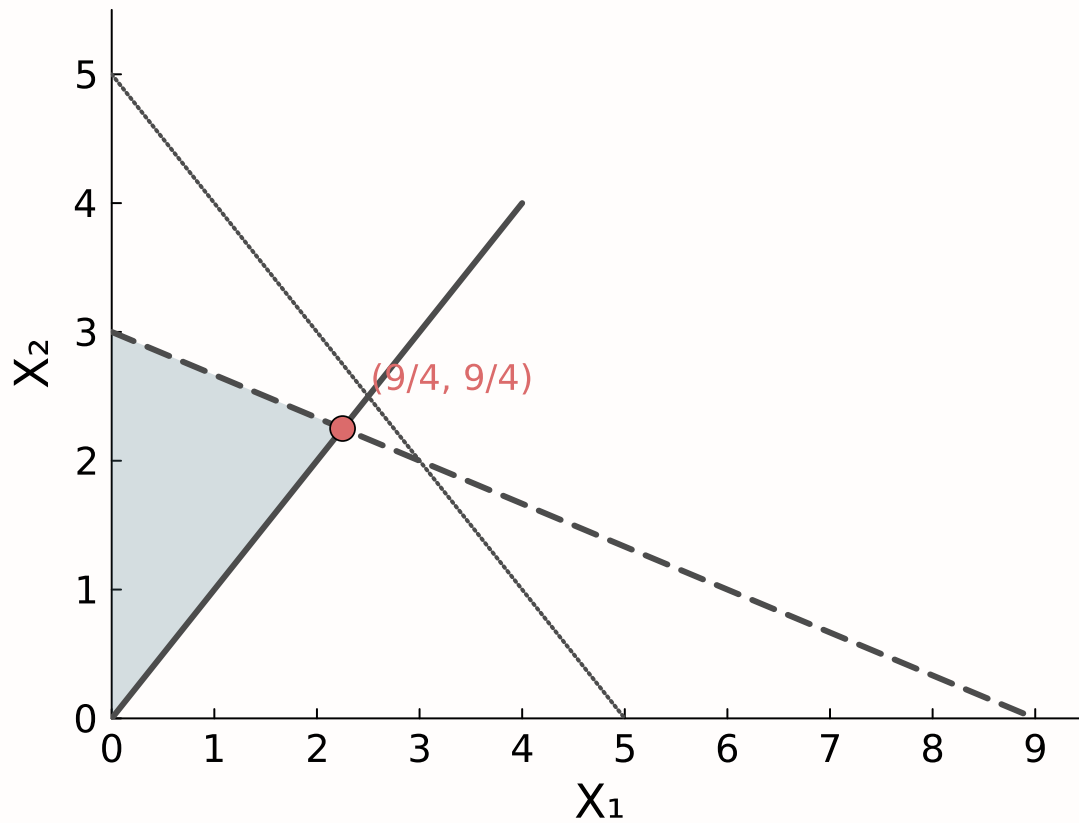
Aus ladungstechnischen Gründen soll Auftrag 1 **nicht mehr Paletten** umfassen als Auftrag 2:

$$X_1 \leq X_2$$

Mit einer weiteren Schlupfvariablen $Y_3 \geq 0$:

$$X_1 - X_2 + Y_3 = 0$$

Grafische Deutung



Die Grenzgerade $X_1 = X_2$ der neuen Restriktion (durchgezogen) schneidet den zulässigen Bereich zum Dreieck.

Das neue Optimum liegt bei $(9/4, 9/4)$.

$X_1 + X_2 \leq 5$ (gepunktet) ist jetzt **redundant**: es könnte entfallen.

Reoptimierung

Idee der Reoptimierung

💡 Idee

Statt das erweiterte Problem neu zu lösen, **fügen wir die neue Restriktion in das vorhandene Optimaltableau ein** und stellen mit wenigen Basistauschen die Zulässigkeit wieder her.

- Vermeidet die Wiederholung vieler primaler Iterationen.
- Oft genügt **eine einzige** Iteration.
- Grundlage der Reoptimierung im **Branch-and-Bound** (Vorlesung 8).

Neue Restriktion einfügen

Die Zeile $X_1 - X_2 + Y_3 = 0$ kommt ins Optimaltableau:

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	b
X_1	1	0	$3/2$	$-1/2$	0	3
X_2	0	1	$-1/2$	$1/2$	0	2
Y_3	1	-1	0	0	1	0
F	0	0	15	5	0	120

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	b
X_1	1	0	$3/2$	$-1/2$	0	3
X_2	0	1	$-1/2$	$1/2$	0	2
Y_3	0	0	-2	1	1	-1
F	0	0	15	5	0	120

Die Basisvariablen X_1, X_2 stehen noch in der neuen Zeile: sie werden mit Elementaroperationen **isoliert** (Zeile 1 subtrahieren, Zeile 2 addieren).

$Y_3 = -1 < 0$: die Basislösung ist **unzulässig**. Y_3 muss die Basis verlassen. Aber die F -Zeile ist weiter optimal!

Dualer Simplex: Pivotwahl

i Reihenfolge umgekehrt zum primalen Simplex

Erst **Pivotzeile**, dann **Pivotspalte**.

- **Pivotzeile** s : negativste b -Zeile, verletzt die Nichtnegativität am stärksten:

$$\min_{\bar{b}_i < 0} \{ \bar{b}_i \} \Rightarrow s$$

- **Pivotspalte** t : Basistausch verschlechtert F am wenigsten, nur **negative** Koeffizienten der Pivotzeile kommen infrage:

$$\max_{\bar{a}_{sj} < 0} \left\{ \frac{-\bar{c}_j}{\bar{a}_{sj}} \right\} \Rightarrow t$$

Reoptimierung durchführen

Pivotzeile Y_3 ; einziger negativer Koeffizient: -2 unter $Y_1 \Rightarrow$ Pivotelement $[-2]$:

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	b
X_1	1	0	$3/2$	$-1/2$	0	3
X_2	0	1	$-1/2$	$1/2$	0	2
Y_3	0	0	-2	1	1	-1
F	0	0	15	5	0	120

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	b
X_1	1	0	0	1/4	3/4	9/4
X_2	0	1	0	1/4	-1/4	9/4
Y_1	0	0	1	-1/2	-1/2	1/2
F	0	0	0	25/2	15/2	225/2

Y_1 kommt für Y_3 in die Basis: ein einziger Basistausch.

Alle $\bar{b}_i \geq 0$ und F -Zeile ≥ 0 : **zulässig und optimal**, $X_1^* = X_2^* = \frac{9}{4}$, $F^* = \frac{225}{2} = 112,5$.

Der duale Simplex-Algorithmus

i Anwendung

Eine Basislösung, die **unzulässig** ist (Basisvariablen negativ), aber die Optimalitätsbedingung erfüllt.

1. **Phase 1** (Zulässigkeit herstellen): Basistausche (erst Pivotzeile, dann Pivotspalte), bis alle $\bar{b}_i \geq 0$.
2. **Phase 2** (falls zulässig, aber nicht optimal): mit dem **primalem** Simplex weiterrechnen.

Ganzzahligkeit

Nicht ganzzahlige Lösung

Die reoptimierte Lösung ist $X_2^* = 9/4$: **nicht ganzzahlig**.

Sinnvoll sind nur ganze Paletten. Wir spalten in **zwei Teilprobleme**:

$$X_2 \leq 2 \quad \text{oder} \quad X_2 \geq 3$$

Jedes Teilproblem lässt sich per **Reoptimierung** (dualer Simplex) lösen: kein Neustart nötig.

Teilproblem 1 einfügen

Die Zeile $X_2 + Y_4 = 2$ wird eingefügt und X_2 isoliert, wieder wird eine b -Zeile negativ:

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	b
X_1	1	0	0	1/4	3/4	0	9/4
X_2	0	1	0	1/4	-1/4	0	9/4
Y_1	0	0	1	-1/2	-1/2	0	1/2
Y_4	0	0	0	-1/4	1/4	1	-1/4
F	0	0	0	25/2	15/2	0	225/2

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	b
X_1	1	0	0	0	1	1	2
X_2	0	1	0	0	0	1	2
Y_1	0	0	1	0	-1	-2	1
Y_2	0	0	0	1	-1	-4	1
F	0	0	0	0	20	50	100

Pivotzeile Y_4 ; einziger negativer Koeffizient $-1/4$ unter $Y_2 \Rightarrow$ Pivot $[-1/4]$.

Ein Basistausch genügt: $X_1^* = 2, X_2^* = 2, F^* = 100$, **ganzzahlig!** Teilproblem 2 ($X_2 \geq 3$) läuft genauso.

Zwei Teilprobleme

1. Teilproblem ($X_2 \leq 2$)

$$X_1^* = 2, X_2^* = 2, F^* = 100$$

2. Teilproblem ($X_2 \geq 3$)

$$X_1^* = 0, X_2^* = 3, F^* = 90$$

! Beste ganzzahlige Lösung

$X_1^* = 2, X_2^* = 2, F^* = 100$ (aus dem 1. Teilproblem).

Dieses systematische Aufspalten ist die Grundidee von **Branch & Bound** (Vorlesung 08).

Reduzierte Kosten

Ein drittes Auftragsangebot

Ein weiterer Auftrag wird angeboten: **24 EUR** je Palette, **1 Stellplatz, 2 Tonnen**.

$$\max F = 20X_1 + 30X_2 + 24X_3$$

$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 5$$

$$X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leq 9$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Frage: **Lohnt sich Auftrag 3 überhaupt?**

Das verrät ein Blick auf die **reduzierten Kosten**, **ohne** das Problem neu zu lösen.

Simplex-Multiplikatoren

Im Optimaltableau stehen unter den Schlupfvariablen die **Simplex-Multiplikatoren**:

$$\pi_1 = 15, \quad \pi_2 = 5$$

Sie entstehen dadurch, dass das 15-fache der 1. und das 5-fache der 2. Ausgangsgleichung zur Zielfunktion addiert wurden:

$$F = 15 \cdot 5 + 5 \cdot 9 = 120 \Rightarrow F = \sum_i \pi_i b_i$$

Definitionen

- c_j : **Zielfunktionskoeffizient** der Variablen X_j
- $-\bar{c}_j$: aktueller Wert in der F -Zeile unter X_j
- $\bar{c}_j$: **reduzierte Kosten** der Variablen X_j
- π_i : **Simplex-Multiplikator** der Zeile i

Im Ausgangstableau gilt stets $\bar{c}_j = c_j$ und $\pi_i = 0$.

Reduzierte Kosten berechnen

Bei zwei Nebenbedingungen:

$$\bar{c}_j = c_j - a_{1j} \pi_1 - a_{2j} \pi_2$$

Für den dritten Auftrag ($c_3 = 24$, $a_{13} = 1$, $a_{23} = 2$):

$$\bar{c}_3 = 24 - 1 \cdot 15 - 2 \cdot 5 = -1$$

Optimalitätsbedingung

i Reduzierte Kosten

$\bar{c}_j \leq 0$ heißt: **kein** Zielfunktionsgewinn durch Aufnahme von X_j (bei Maximierung).
Optimal, wenn $\bar{c}_j \leq 0$ für **alle** j .

Wegen $\bar{c}_3 = -1 < 0$ ist Auftrag 3 **keine lohnende Alternative**.

Preisuntergrenze

Ein vierter Auftrag: $c_4 = 35$, $a_{14} = 2$, $a_{24} = 2$.

Frage: **Ab welchem Erlös würde sich Auftrag 4 lohnen?**

$$\bar{c}_4 = 35 - 2 \cdot 15 - 2 \cdot 5 = -5 < 0$$

Auftrag 4 wird **nicht** übernommen, aber ab einem Erlös $c_4 > 40$ wäre er lohnend.

⇒ Die reduzierten Kosten liefern eine **Preis- bzw. Erlösuntergrenze** für zusätzliche Aufträge.

Kontrolle mit Julia

Erweitertes Problem mit JuMP

Wir lösen das Problem mit der Zusatzrestriktion $X_1 \leq X_2$:

```

using JuMP, HiGHS

modell = Model(HiGHS.Optimizer)
set_silent(modell)

@variable(modell, X1 >= 0)    # Abnahmemenge Auftrag 1
@variable(modell, X2 >= 0)    # Abnahmemenge Auftrag 2

@objective(modell, Max, 20X1 + 30X2)

@constraint(modell, Paletten, X1 + X2 <= 5)
@constraint(modell, Gewicht, X1 + 3X2 <= 9)
@constraint(modell, Auflage, X1 <= X2)          # neue Nebenbedingung

optimize!(modell)
println("F* = ", objective_value(modell),
        " mit X1 = ", value(X1), ", X2 = ", value(X2))

```

```
F* = 112.5 mit X1 = 2.25, X2 = 2.25
```

Ganzzahlige Lösung mit JuMP

Fordern wir Ganzzahligkeit, liefert HiGHS direkt die beste ganzzahlige Lösung:

```

set_integer(X1)
set_integer(X2)

optimize!(modell)
println("F* = ", objective_value(modell),
        " mit X1 = ", value(X1), ", X2 = ", value(X2))

```

```
F* = 100.0 mit X1 = 2.0, X2 = 2.0
```

Zusammenfassung

Das Wichtigste auf einen Blick

- **Reoptimierung** baut auf dem Optimaltableau auf, statt neu zu rechnen.
- Der **duale Simplex** stellt Zulässigkeit her: erst Pivotzeile, dann Pivotspalte.
- Nicht ganzzahlige Lösungen werden in **Teilprobleme** zerlegt (→ Branch & Bound).
- **Reduzierte Kosten** $\bar{c}_j = c_j - \sum_i a_{ij}\pi_i$ beurteilen zusätzliche Alternativen und liefern Preisuntergrenzen.

Literatur

Literaturverzeichnis

Bibliografie