

Vorlesung 02: Primaler Simplex

Grundlagen Operations Research

Motivation

Wenn Zeichnen nicht reicht

Grafisch lösen wir nur zwei Variablen.

Reale Optimierungsprobleme (Zuströme in U-Bahnhöfe, Pilgerströme, Losgrößen) haben **Tausende** Variablen und Nebenbedingungen. Dafür brauchen wir ein **systematisches, rechnerisches** Verfahren: den **Simplex-Algorithmus**.

Wiederholung

Das Einführungsbeispiel

$$\max F = 20X_1 + 30X_2$$

$$X_1 + X_2 \leq 5$$

$$X_1 + 3X_2 \leq 9$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

i Grafisch bestimmtes Optimum

$$X_1^* = 3, X_2^* = 2, F^* = 120$$

Heute: **rechnerisch** statt grafisch.

Das Gleichungssystem

Mit Schlupfvariablen $Y_1, Y_2 \geq 0$:

$$X_1 + X_2 + Y_1 = 5$$

$$X_1 + 3X_2 + Y_2 = 9$$

$$-20X_1 - 30X_2 + F = 0$$

Drei Gleichungen, fünf Variablen: zwei Variablen sind **frei wählbar**.

Iteratives Lösen

Vom Ausprobieren zum System

Idee

Wir starten in einer **Ecke** des Lösungsraums und wandern gezielt zu einer **benachbarten Ecke** mit besserem Zielfunktionswert, bis keine Verbesserung mehr möglich ist.

Jede Ecke entspricht einer **Basislösung**: wir lösen das Gleichungssystem nach drei **Basisvariablen** auf; die übrigen zwei sind null.

Erste Basislösung

Setze $X_1 = X_2 = 0$ (Nichtbasisvariablen). Dann folgt unmittelbar:

$$Y_1 = 5, \quad Y_2 = 9, \quad F = 0$$

- **Basisvariablen** ($BV \geq 0$): Y_1, Y_2, F
- **Nichtbasisvariablen** ($NBV = 0$): X_1, X_2

Eine zulässige, aber noch nicht optimale Basislösung.

Eine bessere Basislösung?

Frage: **Welche Variable soll in die Basis aufgenommen werden?**

Aus der Zielfunktion $F = 20X_1 + 30X_2$:

$$\Delta X_1 = 1 \Rightarrow \Delta F = 20, \quad \Delta X_2 = 1 \Rightarrow \Delta F = 30$$

X_2 steigert den Zielwert pro Einheit am stärksten.

$\Rightarrow X_2$ in die Basis aufnehmen

Wie groß darf X_2 werden?

Bei $X_1 = 0$ gilt:

$$Y_1 = 5 - X_2, \quad Y_2 = 9 - 3X_2$$

Frage: **Wie weit dürfen wir X_2 erhöhen, und wer verlässt dafür die Basis?**

Verlässt Y_1 die Basis ($Y_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 5$), wird $Y_2 = 9 - 15 = -6 < 0$: unzulässig.

Verlässt Y_2 die Basis ($Y_2 = 0 \Rightarrow X_2 = 3$), bleibt $Y_1 = 5 - 3 = 2 \geq 0$: zulässig.

Elementaroperationen

Um die neue Basislösung abzulesen, isolieren wir die Basisvariablen (jede nur noch in einer Gleichung):

- **Multiplikation** einer Gleichung mit einem Wert $\neq 0$
- **Addition/Subtraktion** einer Gleichung zu einer anderen

$\Rightarrow$ Der Informationsgehalt des Gleichungssystems bleibt erhalten.

Der Basistausch im Detail

Ziel: X_2 **isolieren**, nur noch in der zweiten Gleichung.

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + Y_1 &= 5 \\ X_1 + 3X_2 + Y_2 &= 9 \\ -20X_1 - 30X_2 + F &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + Y_1 &= 5 \\ \frac{1}{3}X_1 + X_2 + \frac{1}{3}Y_2 &= 3 \\ -20X_1 - 30X_2 + F &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}X_1 + Y_1 - \frac{1}{3}Y_2 &= 2 \\ \frac{1}{3}X_1 + X_2 + \frac{1}{3}Y_2 &= 3 \\ -20X_1 - 30X_2 + F &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}X_1 + Y_1 - \frac{1}{3}Y_2 &= 2 \\ \frac{1}{3}X_1 + X_2 + \frac{1}{3}Y_2 &= 3 \\ -10X_1 + 10Y_2 + F &= 90 \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung enthält Y_2 . Hier wird X_2 isoliert.

Multiplikation der zweiten Gleichung mit $\frac{1}{3}$: der Koeffizient von X_2 wird 1.

Subtraktion der zweiten von der ersten Gleichung: X_2 verschwindet aus Gleichung 1.

Addition des 30-fachen der zweiten Gleichung zur Zielfunktionszeile. Ablesbar: $Y_1 = 2$, $X_2 = 3$, $F = 90$.

Geht es noch besser?

Die Zielfunktionszeile lautet umgestellt:

$$F = 90 + 10X_1 - 10Y_2$$

Frage: **Sehen Sie noch Verbesserungspotenzial?**

Eine Erhöhung von X_1 steigert F weiter.

$\Rightarrow X_1$ in die Basis aufnehmen; der minimale Quotient $\min\{2/\frac{2}{3}, 3/\frac{1}{3}\} = 3$ zeigt: Y_1 verlässt die Basis (diese **Minimalquotientenregel** führen wir gleich im Tableau formal ein).

Der zweite Basistausch

Gleiches Vorgehen, jetzt für X_1 statt Y_1 :

$$\frac{2}{3}X_1 + Y_1 - \frac{1}{3}Y_2 = 2$$

$$\frac{1}{3}X_1 + X_2 + \frac{1}{3}Y_2 = 3$$

$$-10X_1 + 10Y_2 + F = 90$$

$$X_1 + \frac{3}{2}Y_1 - \frac{1}{2}Y_2 = 3$$

$$\frac{1}{3}X_1 + X_2 + \frac{1}{3}Y_2 = 3$$

$$-10X_1 + 10Y_2 + F = 90$$

$$X_1 + \frac{3}{2}Y_1 - \frac{1}{2}Y_2 = 3$$

$$X_2 - \frac{1}{2}Y_1 + \frac{1}{2}Y_2 = 2$$

$$15Y_1 + 5Y_2 + F = 120$$

X_1 wird in der **ersten** Gleichung isoliert (Y_1 verlässt die Basis).

Multiplikation der ersten Gleichung mit $\frac{3}{2}$.

Subtraktion des $\frac{1}{3}$ -fachen der ersten von der zweiten Gleichung, **Addition** des 10-fachen zur Zielfunktionszeile.

Optimale Basislösung

Nach dem zweiten Basistausch ($X_1 \leftrightarrow Y_1$):

$$X_1 + \frac{3}{2}Y_1 - \frac{1}{2}Y_2 = 3$$

$$X_2 - \frac{1}{2}Y_1 + \frac{1}{2}Y_2 = 2$$

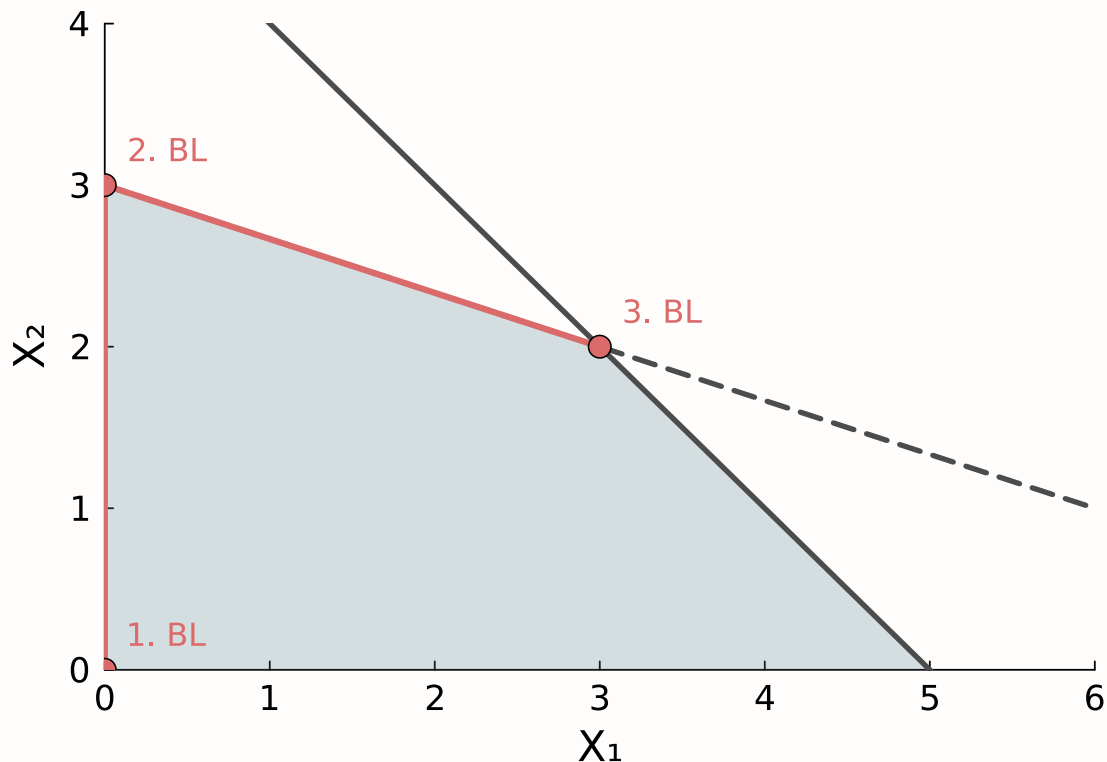
$$15Y_1 + 5Y_2 + F = 120$$

Wegen $F = 120 - 15Y_1 - 5Y_2$ verschlechtert jede Erhöhung von Y_1, Y_2 den Wert.

! Optimale Lösung

$$X_1^* = 3, \quad X_2^* = 2, \quad F^* = 120$$

Basislösung ↔ Eckpunkt



Jeder Basistausch führt zu einem **benachbarten Eckpunkt** des Lösungsraums.

Erste Analysen

Simplex-Multiplikatoren

Vergleich der Zielfunktionszeile (Ausgangssystem → Optimalsystem $15Y_1 + 5Y_2 + F = 120$):

- **15-faches** der 1. Gleichung zur Zielfunktion addiert,
- **5-faches** der 2. Gleichung zur Zielfunktion addiert.

$$F = 15 \cdot 5 + 5 \cdot 9 = 120 \quad \Rightarrow \quad F = \sum_i \pi_i b_i$$

Die π_i heißen **Simplex-Multiplikatoren** (Dualwerte).

Weitere Zusammenhänge

Nicht nur die Zielfunktionszeile: **jede** Gleichung des Optimalsystems ist eine Linearkombination der Ausgangsgleichungen.

Die erste Optimalgleichung: $\frac{3}{2} \times 1.$ Gleichung $-\frac{1}{2} \times 2.$ Gleichung. Probe auf der rechten Seite:

$$\frac{3}{2} \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 9 = \frac{15}{2} - \frac{9}{2} = 3 \checkmark$$

Solche Rekonstruktionen nutzen wir ab Vorlesung 3 zur **Interpretation** optimaler Lösungen und zur Bewertung neuer Alternativen.

Das Simplextableau

Der Algorithmus im Tableau

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	b
Y_1	1	1	1	0	5
Y_2	1	3	0	1	9
F	-20	-30	0	0	0

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	b
Y_1	2/3	0	1	-1/3	2
X_2	1/3	1	0	1/3	3
F	-10	0	0	10	90

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	b
X_1	1	0	3/2	-1/2	3
X_2	0	1	-1/2	1/2	2
F	0	0	15	5	120

Pivotspalte X_2 (-30), Pivotzeile Y_2 ($\min\{5/1, 9/3\} = 3$), Pivotelement $[3]$.

Neue Pivotspalte X_1 (-10), Pivotzeile Y_1 , Pivotelement $[2/3]$; $F = 90$.

Alle Werte der F -Zeile $\geq 0 \Rightarrow$ optimal, $F^* = 120$.

Unbeschränkte Lösung

Angenommen, in einem **anderen** Problem gilt für die aufzunehmende Variable X_3 nur die Beziehung $Y_3 - 4X_3 = 8$, also $Y_3 = 8 + 4X_3$.

Eine Erhöhung von X_3 hält $Y_3 \geq 0$ **stets** ein: kein Quotient begrenzt sie.

$\Rightarrow$ Sind alle Koeffizienten der Pivotspalte ≤ 0 , ist die Lösung unbeschränkt.

Verallgemeinertes Tableau

BV	X_1	...	b
$\vdots$	$\bar{a}_{ij}$		$\bar{b}_i$
F	$-\bar{c}_j$		f

- $\bar{a}_{ij}$: aktueller Koeffizient in Zeile i , Spalte j
- $\bar{b}_i$: aktueller Wert der b -Spalte
- $-\bar{c}_j$: aktueller Wert der F -Zeile

- Ausgangstableau: $\bar{a}_{ij} = a_{ij}$, $\bar{b}_i = b_i$, $\bar{c}_j = c_j$

Der Simplex-Algorithmus

Ziel: optimale Basislösung eines Maximierungs-LOP.

1. **Pivotspalte** t : kleinster negativer Wert der F -Zeile, $\min_{-\bar{c}_j < 0} \{-\bar{c}_j\}$. Keiner negativ $\Rightarrow$ **optimal**.
2. **Pivotzeile** s : kleinster Quotient $\min_{\bar{a}_{it} > 0} \{\bar{b}_i / \bar{a}_{it}\}$.
3. **Elementaroperationen**: Einheitsvektor in der Pivotspalte erzeugen. Weiter mit 1.

Kontrolle mit Julia

Dasselbe Optimum mit JuMP

```
using JuMP, HiGHS

modell = Model(HiGHS.Optimizer)
set_silent(modell)

@variable(modell, X1 >= 0)    # Abnahmemenge Auftrag 1
@variable(modell, X2 >= 0)    # Abnahmemenge Auftrag 2

@objective(modell, Max, 20X1 + 30X2)    # Umsatzerlöse in EUR

@constraint(modell, Paletten, X1 + X2 <= 5)    # max. 5 Paletten
@constraint(modell, Gewicht, X1 + 3X2 <= 9)    # max. 9 Tonnen

optimize!(modell)
println("F* = ", objective_value(modell),
        " mit X1 = ", value(X1), ", X2 = ", value(X2))
```

```
F* = 120.0 mit X1 = 3.0, X2 = 2.0
```

Zusammenfassung

Das Wichtigste auf einen Blick

- Der Simplex wandert von Ecke zu Ecke (**Basistausch**) zu besseren Werten.
- **Pivotspalte** = beste neue BV, **Pivotzeile** = kleinster Quotient.
- Abbruch, wenn die F -Zeile keine negativen Werte mehr enthält.
- Die **Simplex-Multiplikatoren** liefern $F = \sum_i \pi_i b_i$.

Literatur

Literaturverzeichnis

Bibliografie