

Vorlesung 02: Primaler Simplex

Grundlagen Operations Research

Prof. Dr. Knut Haase

Motivation

Wenn Zeichnen nicht reicht

Grafisch lösen wir nur zwei Variablen.

Reale Optimierungsprobleme (Zuströme in U-Bahnhöfe, Pilgerströme, Losgrößen) haben **Tausende** Variablen und Nebenbedingungen. Dafür brauchen wir ein **systematisches, rechnerisches** Verfahren: den **Simplex-Algorithmus**.

Wiederholung

Das Einführungsbeispiel

$$\max F = 20X_1 + 30X_2$$

$$X_1 + X_2 \leq 5$$

$$X_1 + 3X_2 \leq 9$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

 Grafisch bestimmtes Optimum

$$X_1^* = 3, X_2^* = 2, F^* = 120$$

Das Einführungsbeispiel

$$\max F = 20X_1 + 30X_2$$

$$X_1 + X_2 \leq 5$$

$$X_1 + 3X_2 \leq 9$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

 Grafisch bestimmtes Optimum

$$X_1^* = 3, X_2^* = 2, F^* = 120$$

Heute: **rechnerisch** statt
grafisch.

Das Gleichungssystem

Mit Schlupfvariablen $Y_1, Y_2 \geq 0$:

$$X_1 + X_2 + Y_1 = 5$$

$$X_1 + 3X_2 + Y_2 = 9$$

$$-20X_1 - 30X_2 + F = 0$$

Das Gleichungssystem

Mit Schlupfvariablen $Y_1, Y_2 \geq 0$:

$$X_1 + X_2 + Y_1 = 5$$

$$X_1 + 3X_2 + Y_2 = 9$$

$$-20X_1 - 30X_2 + F = 0$$

Drei Gleichungen, fünf Variablen: zwei Variablen sind **frei wählbar**.

Das Gleichungssystem

Mit Schlupfvariablen $Y_1, Y_2 \geq 0$:

$$X_1 + X_2 + Y_1 = 5$$

$$X_1 + 3X_2 + Y_2 = 9$$

$$-20X_1 - 30X_2 + F = 0$$

Drei Gleichungen, fünf Variablen: zwei Variablen sind **frei wählbar**.



Gleich ausprobieren

Auf der nächsten Folie schieben Sie den Plan selbst und sehen dabei X_1, X_2, Y_1 und Y_2 . Welche Werte sind am besten Punkt null?

Sie sind dran

Ziehen Sie den Punkt dorthin, wo der Erlös am höchsten ist, und beobachten Sie, welche Werte dabei null werden. Dunkler getönt ist, was jenseits der Zielgeraden noch mehr Erlös bringt.

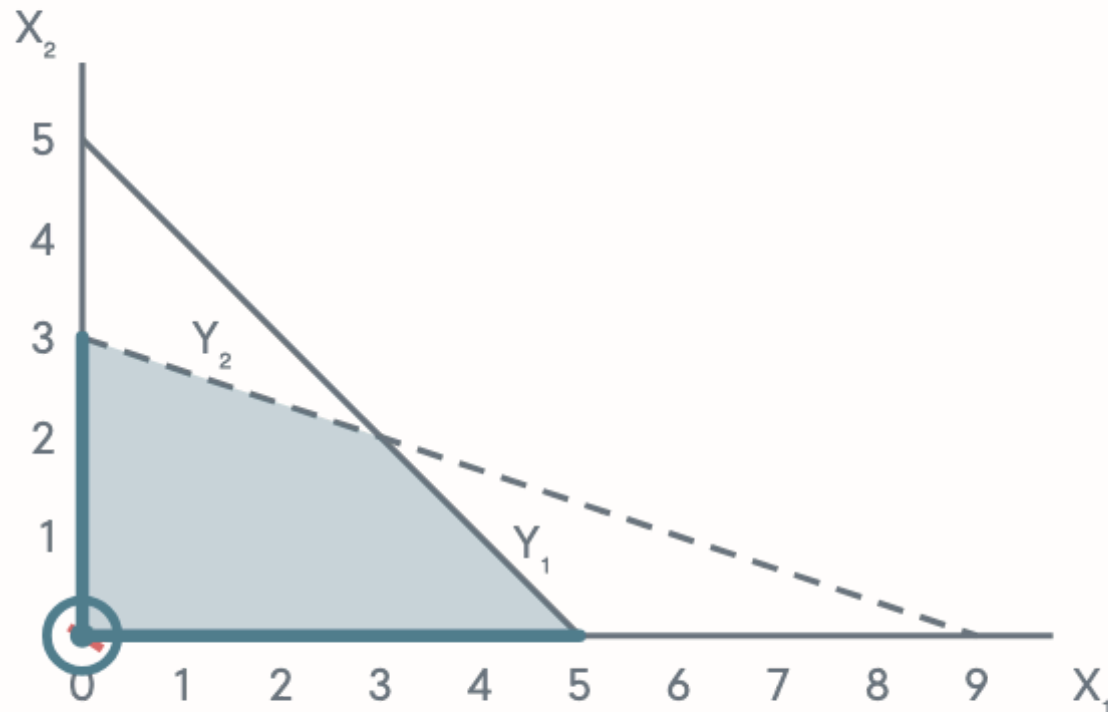
$$F = 20 X_1 + 30 X_2$$

X_1 0 Paletten Auftrag 1

X_2 0 Paletten Auftrag 2

Y_1 5 freie Stellplätze

Y_2 9 freie Tonnen



Eigener Plan 0 €

Bereit: „Optimieren“
vergleicht den Plan
mit dem besten.

Optimieren

Reset

Neu

Iteratives Lösen

Vom Ausprobieren zum System

Im Spiel lag der beste Punkt an einer **Ecke**, und dort waren genau zwei der vier Werte null.



Wir starten in einer **Ecke** des Lösungsraums und wandern gezielt zu einer **benachbarten Ecke** mit besserem Zielfunktionswert, bis keine Verbesserung mehr möglich ist.

Jede Ecke entspricht einer **Basislösung**: wir lösen das Gleichungssystem nach drei **Basisvariablen** auf; die übrigen zwei sind null.

Erste Basislösung

Setze $X_1 = X_2 = 0$ (Nichtbasisvariablen). Dann folgt unmittelbar:

$$Y_1 = 5, \quad Y_2 = 9, \quad F = 0$$

Erste Basislösung

Setze $X_1 = X_2 = 0$ (Nichtbasisvariablen). Dann folgt unmittelbar:

$$Y_1 = 5, \quad Y_2 = 9, \quad F = 0$$

- **Basisvariablen** (BV ≥ 0): Y_1, Y_2, F

Erste Basislösung

Setze $X_1 = X_2 = 0$ (Nichtbasisvariablen). Dann folgt unmittelbar:

$$Y_1 = 5, \quad Y_2 = 9, \quad F = 0$$

- **Basisvariablen** ($BV \geq 0$): Y_1, Y_2, F
- **Nichtbasisvariablen** ($NBV = 0$): X_1, X_2

Erste Basislösung

Setze $X_1 = X_2 = 0$ (Nichtbasisvariablen). Dann folgt unmittelbar:

$$Y_1 = 5, \quad Y_2 = 9, \quad F = 0$$

- **Basisvariablen** (BV ≥ 0): Y_1, Y_2, F
- **Nichtbasisvariablen** (NBV $= 0$): X_1, X_2

Eine zulässige, aber noch nicht optimale Basislösung.

Eine bessere Basislösung?

Frage: Welche Variable soll in die Basis aufgenommen werden?

Eine bessere Basislösung?

Frage: Welche Variable soll in die Basis aufgenommen werden?

Aus der Zielfunktion $F = 20X_1 + 30X_2$:

$$\Delta X_1 = 1 \Rightarrow \Delta F = 20, \quad \Delta X_2 = 1 \Rightarrow \Delta F = 30$$

Eine bessere Basislösung?

Frage: Welche Variable soll in die Basis aufgenommen werden?

Aus der Zielfunktion $F = 20X_1 + 30X_2$:

$$\Delta X_1 = 1 \Rightarrow \Delta F = 20, \quad \Delta X_2 = 1 \Rightarrow \Delta F = 30$$

X_2 steigert den Zielwert pro Einheit am stärksten.

$\Rightarrow$ **X_2 in die Basis aufnehmen**

Wie groß darf X_2 werden?

Bei $X_1 = 0$ gilt:

$$Y_1 = 5 - X_2, \quad Y_2 = 9 - 3X_2$$

Wie groß darf X_2 werden?

Bei $X_1 = 0$ gilt:

$$Y_1 = 5 - X_2, \quad Y_2 = 9 - 3X_2$$

Frage: Wie weit dürfen wir X_2 erhöhen, und wer verlässt dafür die Basis?

Wie groß darf X_2 werden?

Bei $X_1 = 0$ gilt:

$$Y_1 = 5 - X_2, \quad Y_2 = 9 - 3X_2$$

Frage: Wie weit dürfen wir X_2 erhöhen, und wer verlässt dafür die Basis?

Verlässt Y_1 die Basis ($Y_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 5$), wird $Y_2 = 9 - 15 = -6 < 0$:
unzulässig.

Wie groß darf X_2 werden?

Bei $X_1 = 0$ gilt:

$$Y_1 = 5 - X_2, \quad Y_2 = 9 - 3X_2$$

Frage: Wie weit dürfen wir X_2 erhöhen, und wer verlässt dafür die Basis?

Verlässt Y_1 die Basis ($Y_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 5$), wird $Y_2 = 9 - 15 = -6 < 0$:
unzulässig.

Verlässt Y_2 die Basis ($Y_2 = 0 \Rightarrow X_2 = 3$), bleibt $Y_1 = 5 - 3 = 2 \geq 0$:
zulässig.

Elementaroperationen

Um die neue Basislösung abzulesen, isolieren wir die Basisvariablen (jede nur noch in einer Gleichung):

- **Multiplikation** einer Gleichung mit einem Wert $\neq 0$
- **Addition/Subtraktion** einer Gleichung zu einer anderen

⇒ Der Informationsgehalt des Gleichungssystems bleibt erhalten.

Der Basistausch im Detail

Ziel: X_2 **isolieren**, nur noch in der zweiten Gleichung.

$$X_1 + X_2 + Y_1 = 5$$

$$X_1 + 3X_2 + Y_2 = 9$$

$$-20X_1 - 30X_2 + F = 0$$

Die zweite Gleichung enthält Y_2 . Hier wird X_2 isoliert.

Der Basistausch im Detail

Ziel: X_2 **isolieren**, nur noch in der zweiten Gleichung.

$$X_1 + X_2 + Y_1 = 5$$

$$\frac{1}{3}X_1 + X_2 + \frac{1}{3}Y_2 = 3$$

$$-20X_1 - 30X_2 + F = 0$$

Multiplikation der zweiten Gleichung mit $\frac{1}{3}$: der Koeffizient von X_2 wird 1.

Der Basistausch im Detail

Ziel: X_2 **isolieren**, nur noch in der zweiten Gleichung.

$$\frac{2}{3}X_1 + Y_1 - \frac{1}{3}Y_2 = 2$$

$$\frac{1}{3}X_1 + X_2 + \frac{1}{3}Y_2 = 3$$

$$-20X_1 - 30X_2 + F = 0$$

Subtraktion der zweiten von der ersten Gleichung: X_2 verschwindet aus Gleichung 1.

Der Basistausch im Detail

Ziel: X_2 **isolieren**, nur noch in der zweiten Gleichung.

$$\frac{2}{3}X_1 + Y_1 - \frac{1}{3}Y_2 = 2$$

$$\frac{1}{3}X_1 + X_2 + \frac{1}{3}Y_2 = 3$$

$$-10X_1 + 10Y_2 + F = 90$$

Addition des 30-fachen der zweiten Gleichung zur Zielfunktionszeile. Ablesbar: $Y_1 = 2$, $X_2 = 3$, $F = 90$.

Geht es noch besser?

Die Zielfunktionszeile lautet umgestellt:

$$F = 90 + 10X_1 - 10Y_2$$

Geht es noch besser?

Die Zielfunktionszeile lautet umgestellt:

$$F = 90 + 10X_1 - 10Y_2$$

Frage: Sehen Sie noch Verbesserungspotenzial?

Geht es noch besser?

Die Zielfunktionszeile lautet umgestellt:

$$F = 90 + 10X_1 - 10Y_2$$

Frage: Sehen Sie noch Verbesserungspotenzial?

Eine Erhöhung von X_1 steigert F weiter.

⇒ **X_1 in die Basis aufnehmen**

Wie groß darf X_1 werden?

$Y_2 = 0$ bleibt Nichtbasisvariable. Die ersten beiden Gleichungen ergeben:

$$Y_1 = 2 - \frac{2}{3}X_1, \quad X_2 = 3 - \frac{1}{3}X_1$$

Wie groß darf X_1 werden?

$Y_2 = 0$ bleibt Nichtbasisvariable. Die ersten beiden Gleichungen ergeben:

$$Y_1 = 2 - \frac{2}{3}X_1, \quad X_2 = 3 - \frac{1}{3}X_1$$

$Y_1 \geq 0$ verlangt $\frac{2}{3}X_1 \leq 2$, also $X_1 \leq 3$.

Wie groß darf X_1 werden?

$Y_2 = 0$ bleibt Nichtbasisvariable. Die ersten beiden Gleichungen ergeben:

$$Y_1 = 2 - \frac{2}{3}X_1, \quad X_2 = 3 - \frac{1}{3}X_1$$

$Y_1 \geq 0$ verlangt $\frac{2}{3}X_1 \leq 2$, also $X_1 \leq 3$.

$X_2 \geq 0$ verlangt $\frac{1}{3}X_1 \leq 3$, also $X_1 \leq 9$.

Wie groß darf X_1 werden?

$Y_2 = 0$ bleibt Nichtbasisvariable. Die ersten beiden Gleichungen ergeben:

$$Y_1 = 2 - \frac{2}{3}X_1, \quad X_2 = 3 - \frac{1}{3}X_1$$

$Y_1 \geq 0$ verlangt $\frac{2}{3}X_1 \leq 2$, also $X_1 \leq 3$.

$X_2 \geq 0$ verlangt $\frac{1}{3}X_1 \leq 3$, also $X_1 \leq 9$.

$\Rightarrow X_1$ darf höchstens den Wert 3 annehmen, **Y_1 verlässt die Basis.**

Das ist der minimale Quotient $\min\{2/\frac{2}{3}, 3/\frac{1}{3}\} = 3$ (diese

Minimalquotientenregel führen wir gleich im Tableau formal ein).

Der zweite Basistausch

Gleiches Vorgehen, jetzt für X_1 statt Y_1 :

$$\frac{2}{3}X_1 + Y_1 - \frac{1}{3}Y_2 = 2$$

$$\frac{1}{3}X_1 + X_2 + \frac{1}{3}Y_2 = 3$$

$$-10X_1 + 10Y_2 + F = 90$$

X_1 wird in der **ersten** Gleichung isoliert (Y_1 verlässt die Basis).

Der zweite Basistausch

Gleiches Vorgehen, jetzt für X_1 statt Y_1 :

$$X_1 + \frac{3}{2}Y_1 - \frac{1}{2}Y_2 = 3$$

$$\frac{1}{3}X_1 + X_2 + \frac{1}{3}Y_2 = 3$$

$$-10X_1 + 10Y_2 + F = 90$$

Multiplikation der ersten Gleichung mit $\frac{3}{2}$.

Der zweite Basistausch

Gleiches Vorgehen, jetzt für X_1 statt Y_1 :

$$X_1 + \frac{3}{2}Y_1 - \frac{1}{2}Y_2 = 3$$

$$X_2 - \frac{1}{2}Y_1 + \frac{1}{2}Y_2 = 2$$

$$-10X_1 + 10Y_2 + F = 90$$

Subtraktion des $\frac{1}{3}$ -fachen der ersten von der zweiten Gleichung: X_1 verschwindet aus Gleichung 2.

Der zweite Basistausch

Gleiches Vorgehen, jetzt für X_1 statt Y_1 :

$$X_1 + \frac{3}{2}Y_1 - \frac{1}{2}Y_2 = 3$$

$$X_2 - \frac{1}{2}Y_1 + \frac{1}{2}Y_2 = 2$$

$$\mathbf{15Y_1 + 5Y_2 + F = 120}$$

Addition des 10-fachen der ersten Gleichung zur Zielfunktionszeile.

Ablesbar: $X_1 = 3, X_2 = 2, F = 120$.

Optimale Basislösung

Nach dem zweiten Basistausch ($X_1 \leftrightarrow Y_1$):

$$X_1 + \frac{3}{2}Y_1 - \frac{1}{2}Y_2 = 3$$

$$X_2 - \frac{1}{2}Y_1 + \frac{1}{2}Y_2 = 2$$

$$15Y_1 + 5Y_2 + F = 120$$

Wegen $F = 120 - 15Y_1 - 5Y_2$ verschlechtert jede Erhöhung von Y_1, Y_2 den Wert.

Optimale Basislösung

Nach dem zweiten Basistausch ($X_1 \leftrightarrow Y_1$):

$$X_1 + \frac{3}{2}Y_1 - \frac{1}{2}Y_2 = 3$$

$$X_2 - \frac{1}{2}Y_1 + \frac{1}{2}Y_2 = 2$$

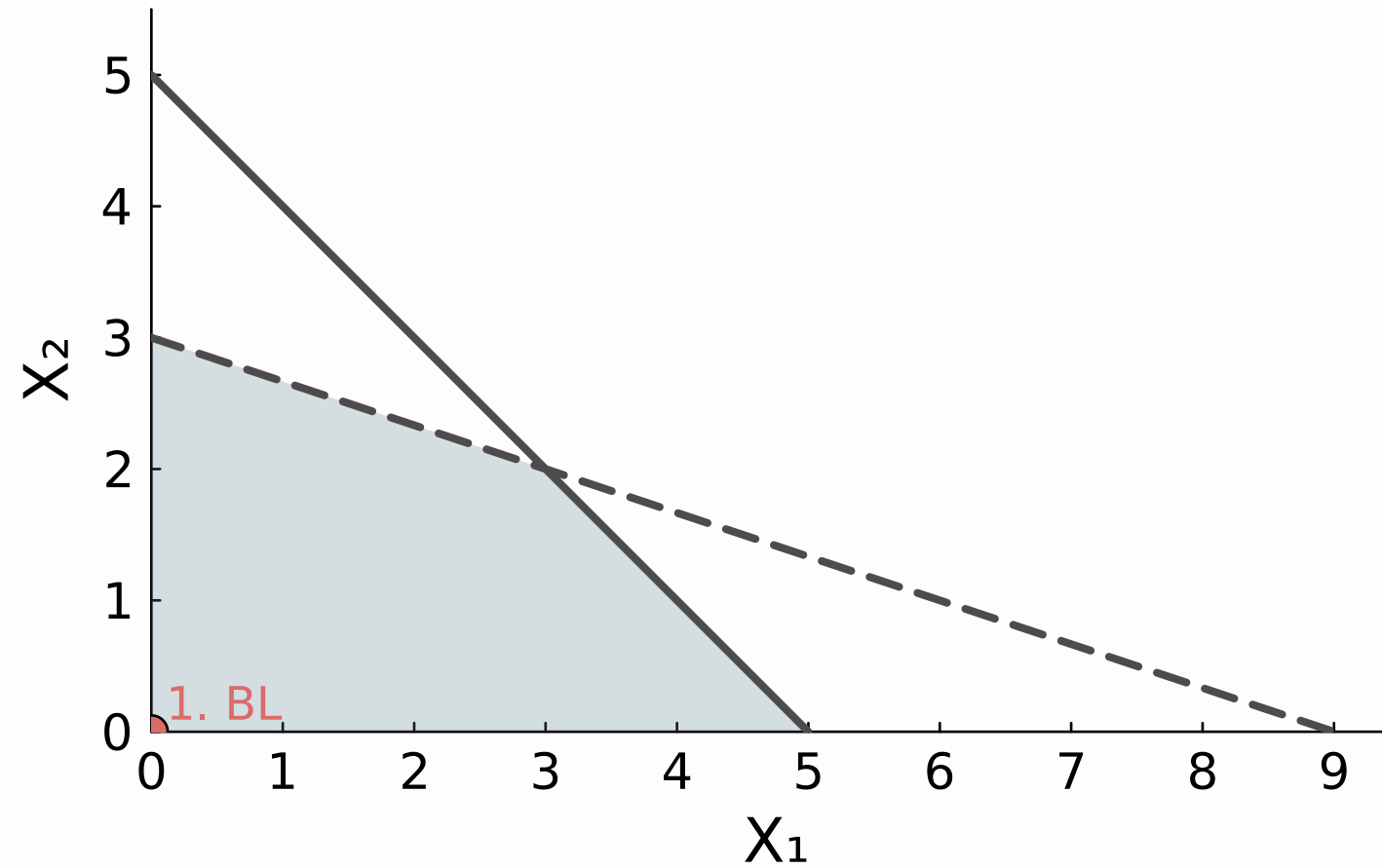
$$15Y_1 + 5Y_2 + F = 120$$

Wegen $F = 120 - 15Y_1 - 5Y_2$ verschlechtert jede Erhöhung von Y_1, Y_2 den Wert.

! Optimale Lösung

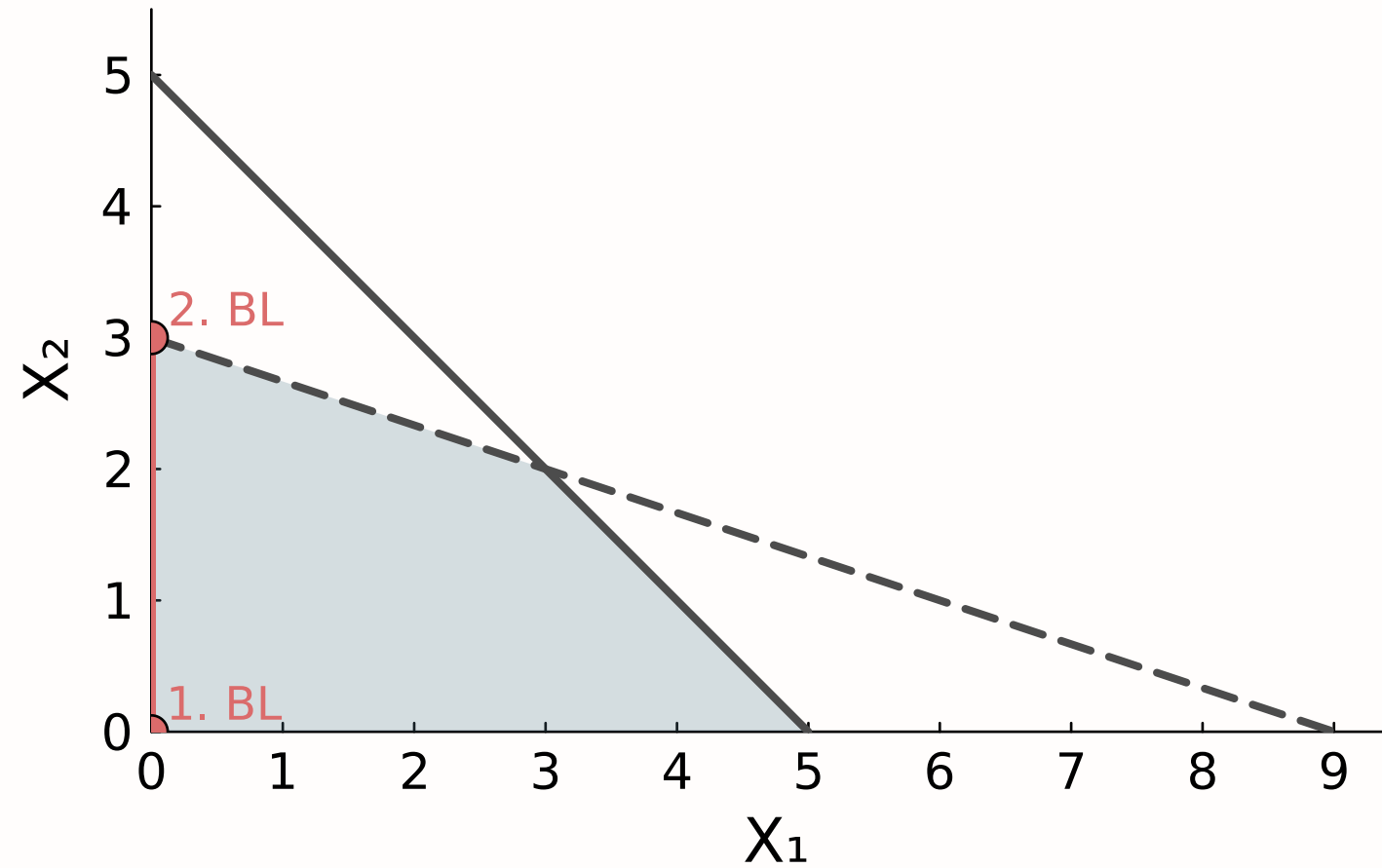
$$X_1^* = 3, \quad X_2^* = 2, \quad F^* = 120$$

Basislösung $\leftrightarrow$ Eckpunkt



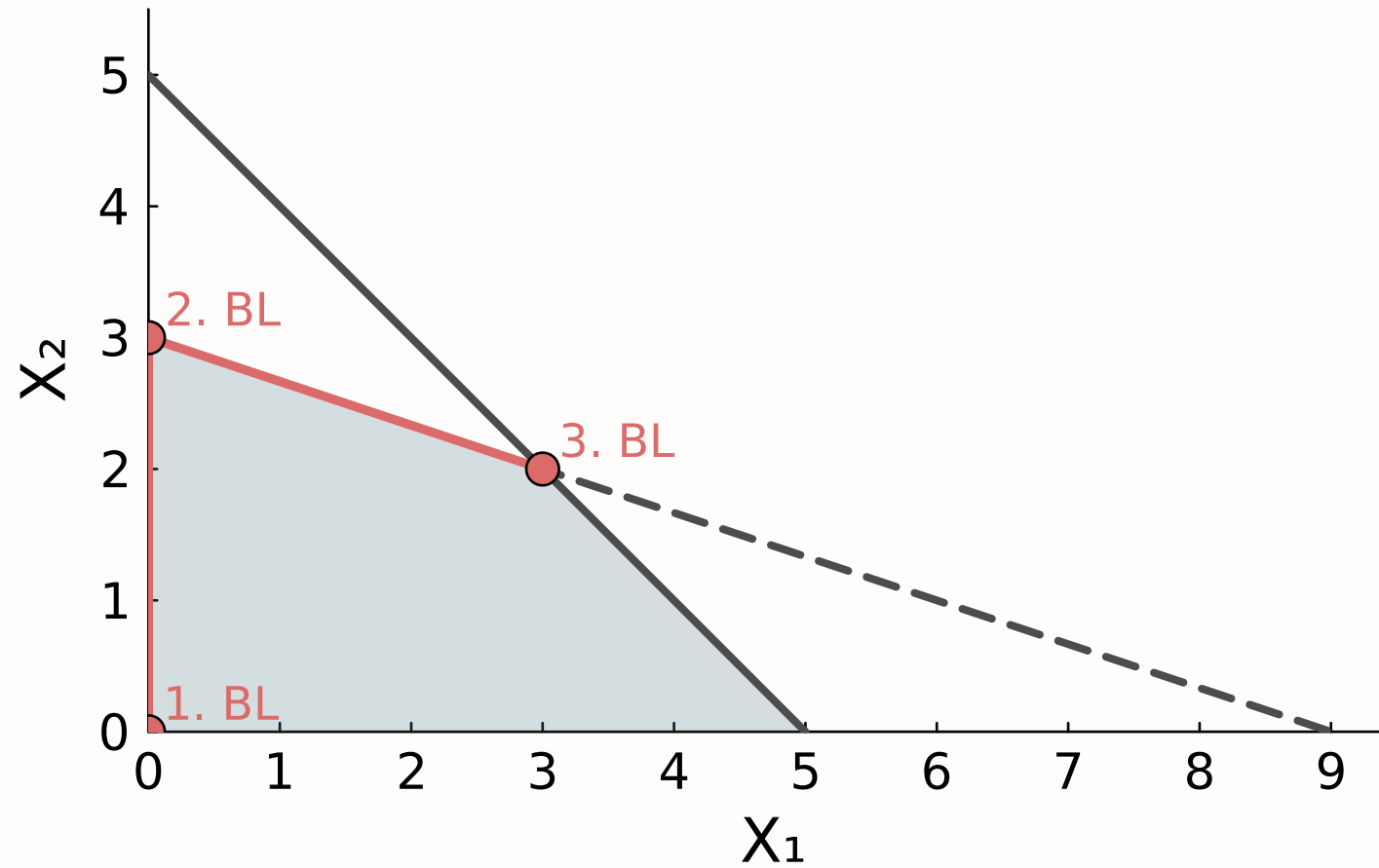
Start in der 1. Basislösung: Ursprung $(0, 0)$ mit $F = 0$.

Basislösung $\leftrightarrow$ Eckpunkt



1. Basistausch: **benachbarter Eckpunkt** $(0, 3)$ mit $F = 90$.

Basislösung $\leftrightarrow$ Eckpunkt



2. Basistausch: wieder benachbart, Optimum $(3,2)$ mit $F = 120$.

Erste Analysen

Simplex-Multiplikatoren

Vergleich der Zielfunktionszeile (Ausgangssystem $\rightarrow$ Optimalsystem $15Y_1 + 5Y_2 + F = 120$):

- **15-faches** der 1. Gleichung zur Zielfunktion addiert,
- **5-faches** der 2. Gleichung zur Zielfunktion addiert.

Die π_i heißen **Simplex-Multiplikatoren** (Dualwerte).

Im Tableau steht π_i in der F -Zeile unter der Schlupfvariablen Y_i .

Simplex-Multiplikatoren

Vergleich der Zielfunktionszeile (Ausgangssystem → Optimalsystem $15Y_1 + 5Y_2 + F = 120$):

- **15-faches** der 1. Gleichung zur Zielfunktion addiert,
- **5-faches** der 2. Gleichung zur Zielfunktion addiert.

$$F = 15 \cdot 5 + 5 \cdot 9 = 120 \quad \Rightarrow \quad F = \sum_i \pi_i b_i$$

Die π_i heißen **Simplex-Multiplikatoren** (Dualwerte).

Im Tableau steht π_i in der F -Zeile unter der Schlupfvariablen Y_i .

Weitere Zusammenhänge

Nicht nur die Zielfunktionszeile: **jede** Gleichung des Optimalsystems ist eine Linearkombination der Ausgangsgleichungen.

Weitere Zusammenhänge

Nicht nur die Zielfunktionszeile: **jede** Gleichung des Optimalsystems ist eine Linearkombination der Ausgangsgleichungen.

Die erste Optimalgleichung: $\frac{3}{2} \times$ 1. Gleichung $- \frac{1}{2} \times$ 2. Gleichung.
Probe auf der rechten Seite:

$$\frac{3}{2} \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 9 = \frac{15}{2} - \frac{9}{2} = 3 \checkmark$$

Weitere Zusammenhänge

Nicht nur die Zielfunktionszeile: **jede** Gleichung des Optimalsystems ist eine Linearkombination der Ausgangsgleichungen.

Die erste Optimalgleichung: $\frac{3}{2} \times$ 1. Gleichung $- \frac{1}{2} \times$ 2. Gleichung.
Probe auf der rechten Seite:

$$\frac{3}{2} \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 9 = \frac{15}{2} - \frac{9}{2} = 3 \checkmark$$

Solche Rekonstruktionen nutzen wir ab Vorlesung 3 zur **Interpretation** optimaler Lösungen und zur Bewertung neuer Alternativen.

Das Simplextableau

Der Algorithmus im Tableau

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	b
Y_1	1	1	1	0	5
Y_2	1	3	0	1	9
F	-20	-30	0	0	0

Pivotspalte X_2 (-30), Pivotzeile Y_2 ($\min\{5/1, 9/3\} = 3$), Pivotelement [3].

Der Algorithmus im Tableau

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	b
Y_1	2/3	0	1	-1/3	2
X_2	1/3	1	0	1/3	3
F	-10	0	0	10	90

Neue Pivotspalte X_1 (-10), Pivotzeile Y_1 , Pivotelement [2/3]. $F = 90$.

Der Algorithmus im Tableau

BV	X_1	X_2	Y_1	Y_2	b
X_1	1	0	$3/2$	$-1/2$	3
X_2	0	1	$-1/2$	$1/2$	2
F	0	0	15	5	120

Alle Werte der F -Zeile $\geq 0 \Rightarrow$ optimal, $F^* = 120$.

Unbeschränkte Lösung

Angenommen, in einem **anderen** Problem gilt für die aufzunehmende Variable X_3 nur die Beziehung $Y_3 - 4X_3 = 8$, also $Y_3 = 8 + 4X_3$.

Unbeschränkte Lösung

Angenommen, in einem **anderen** Problem gilt für die aufzunehmende Variable X_3 nur die Beziehung $Y_3 - 4X_3 = 8$, also $Y_3 = 8 + 4X_3$.

Eine Erhöhung von X_3 hält $Y_3 \geq 0$ **stets** ein: kein Quotient begrenzt sie.

Unbeschränkte Lösung

Angenommen, in einem **anderen** Problem gilt für die aufzunehmende Variable X_3 nur die Beziehung $Y_3 - 4X_3 = 8$, also $Y_3 = 8 + 4X_3$.

Eine Erhöhung von X_3 hält $Y_3 \geq 0$ **stets** ein: kein Quotient begrenzt sie.

$\Rightarrow$ Sind alle Koeffizienten der Pivotspalte ≤ 0 , ist die Lösung **unbeschränkt**.

Verallgemeinertes Tableau

BV	X_1	...	b
$\vdots$	$\bar{a}_{ij}$		$\bar{b}_i$
F	$-\bar{c}_j$		f

- $\bar{a}_{ij}$: aktueller Koeffizient in Zeile i , Spalte j
- $\bar{b}_i$: aktueller Wert der b -Spalte
- $-\bar{c}_j$: aktueller Wert der F -Zeile
- Ausgangstableau: $\bar{a}_{ij} = a_{ij}$, $\bar{b}_i = b_i$, $\bar{c}_j = c_j$

Der Simplex-Algorithmus

Ziel: optimale Basislösung eines Maximierungs-LOP.

Der Simplex-Algorithmus

Ziel: optimale Basislösung eines Maximierungs-LOP.

1. **Pivotspalte** t : kleinster negativer Wert der F -Zeile, $\min_{-\bar{c}_j < 0} \{-\bar{c}_j\}$;
bei mehreren gleich kleinen Werten eine davon beliebig wählen.
Keiner negativ $\Rightarrow$ **optimal**.

Der Simplex-Algorithmus

Ziel: optimale Basislösung eines Maximierungs-LOP.

1. **Pivotspalte** t : kleinster negativer Wert der F -Zeile, $\min_{\bar{c}_j < 0} \{-\bar{c}_j\}$;
bei mehreren gleich kleinen Werten eine davon beliebig wählen.
Keiner negativ $\Rightarrow$ **optimal**.
2. **Pivotzeile** s : kleinster Quotient $\min_{\bar{a}_{it} > 0} \{\bar{b}_i / \bar{a}_{it}\}$.

Der Simplex-Algorithmus

Ziel: optimale Basislösung eines Maximierungs-LOP.

1. **Pivotspalte** t : kleinster negativer Wert der F -Zeile, $\min_{- \bar{c}_j < 0} \{ -\bar{c}_j \}$;
bei mehreren gleich kleinen Werten eine davon beliebig wählen.
Keiner negativ $\Rightarrow$ **optimal**.
2. **Pivotzeile** s : kleinster Quotient $\min_{\bar{a}_{it} > 0} \{ \bar{b}_i / \bar{a}_{it} \}$.
3. **Elementaroperationen**: Einheitsvektor in der Pivotspalte erzeugen. Weiter mit 1.

Kontrolle mit Julia

Dasselbe Optimum mit JuMP

```
1 using JuMP, HiGHS
2
3 modell = Model(HiGHS.Optimizer)
4 set_silent(modell)
5
6 @variable(modell, X1 >= 0)    # Abnahmemenge Auftrag 1
7 @variable(modell, X2 >= 0)    # Abnahmemenge Auftrag 2
8
9 @objective(modell, Max, 20X1 + 30X2)    # Umsatzerlöse in EUR
10
11 @constraint(modell, Paletten, X1 + X2 <= 5)    # max. 5 Paletten
12 @constraint(modell, Gewicht, X1 + 3X2 <= 9)    # max. 9 Tonnen
13
14 optimize!(modell)
15 println("F* = ", objective_value(modell),
16         " mit X1 = ", value(X1), ", X2 = ", value(X2))
```

Dasselbe Optimum mit JuMP

```
1 using JuMP, HiGHS
2
3 modell = Model(HiGHS.Optimizer)
4 set_silent(modell)
5
6 @variable(modell, X1 >= 0)    # Abnahmemenge Auftrag 1
7 @variable(modell, X2 >= 0)    # Abnahmemenge Auftrag 2
8
9 @objective(modell, Max, 20X1 + 30X2)    # Umsatzerlöse in EUR
10
11 @constraint(modell, Paletten, X1 + X2 <= 5)    # max. 5 Paletten
12 @constraint(modell, Gewicht, X1 + 3X2 <= 9)    # max. 9 Tonnen
13
14 optimize!(modell)
15 println("F* = ", objective_value(modell),
16         " mit X1 = ", value(X1), ", X2 = ", value(X2))
```

F* = 120.0 mit X1 = 3.0, X2 = 2.0

Zusammenfassung

Das Wichtigste auf einen Blick

Das Wichtigste auf einen Blick

- Der Simplex wandert von Ecke zu Ecke (**Basistausch**) zu besseren Werten.

Das Wichtigste auf einen Blick

- Der Simplex wandert von Ecke zu Ecke (**Basistausch**) zu besseren Werten.
- **Pivotspalte** = beste neue BV, **Pivotzeile** = kleinster Quotient.

Das Wichtigste auf einen Blick

- Der Simplex wandert von Ecke zu Ecke (**Basistausch**) zu besseren Werten.
- **Pivotspalte** = beste neue BV, **Pivotzeile** = kleinster Quotient.
- Abbruch, wenn die F -Zeile keine negativen Werte mehr enthält.

Das Wichtigste auf einen Blick

- Der Simplex wandert von Ecke zu Ecke (**Basistausch**) zu besseren Werten.
- **Pivotspalte** = beste neue BV, **Pivotzeile** = kleinster Quotient.
- Abbruch, wenn die F -Zeile keine negativen Werte mehr enthält.
- Die **Simplex-Multiplikatoren** liefern $F = \sum_i \pi_i b_i$.

Literatur

Literaturverzeichnis

Domschke, Wolfgang, Andreas Drexl, Robert Klein, und Armin Scholl. 2015. *Einführung in Operations Research*. 9. Aufl. Springer Gabler. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-48216-2>.