

Vorlesung 01: Grafisches Lösen

Grundlagen Operations Research

Prof. Dr. Knut Haase

Organisatorisches

Herzlich willkommen!

Grundlagen Operations Research

- Prof. Dr. Knut Haase, Simon Rienks, Fiona Sauerbier und Dr. Tobias Vlček
- Institut für Logistik, Verkehr und Produktion
- University of Hamburg Business School
- Ein forschungsorientiertes Modul mit starkem Praxisbezug

Aufbau der Veranstaltung

Aufbau der Veranstaltung

1. **Vorlesung (2 SWS)**: die zwölf Themen des Kurses

Aufbau der Veranstaltung

1. **Vorlesung (2 SWS)**: die zwölf Themen des Kurses
2. **Übungen (1 SWS)**: Übungsvideos + Julia-Aufgaben, jederzeit verfügbar

Aufbau der Veranstaltung

1. **Vorlesung (2 SWS)**: die zwölf Themen des Kurses
2. **Übungen (1 SWS)**: Übungsvideos + Julia-Aufgaben, jederzeit verfügbar
3. **Besprechungen (1 SWS)**: Fragen & Aufgabenvorstellung (bis 2 Bonuspunkte)

Aufbau der Veranstaltung

1. **Vorlesung (2 SWS)**: die zwölf Themen des Kurses
2. **Übungen (1 SWS)**: Übungsvideos + Julia-Aufgaben, jederzeit verfügbar
3. **Besprechungen (1 SWS)**: Fragen & Aufgabenvorstellung (bis 2 Bonuspunkte)
4. **Klausurtrainer (freiwillig)**: Übungsaufgaben in OpenOlat (bis 6 Bonuspunkte)

Aufbau der Veranstaltung

1. **Vorlesung (2 SWS)**: die zwölf Themen des Kurses
2. **Übungen (1 SWS)**: Übungsvideos + Julia-Aufgaben, jederzeit verfügbar
3. **Besprechungen (1 SWS)**: Fragen & Aufgabenvorstellung (bis 2 Bonuspunkte)
4. **Klausurtrainer (freiwillig)**: Übungsaufgaben in OpenOlat (bis 6 Bonuspunkte)

Details finden Sie im [Syllabus](#) und in den [häufigen Fragen](#).

Warum sich der Aufwand lohnt

Die Klausur: **90 Minuten**, **90 Punkte**, dazu bis zu **8 Bonuspunkte**.
Auswertung eines früheren Wintersemesters:

- Klausurtrainer ≥ 4 Punkte, **keine** Besprechungs-Bonuspunkte: im Schnitt **+12 Punkte** in der Klausur.
- Klausurtrainer ≥ 4 Punkte und **2** Besprechungs-Bonuspunkte: im Schnitt **+18 Punkte**.

Bonuspunkte zählen erst ab einer bestandenen Klausur (mind. 4,0).

Inhalte der Veranstaltung

Inhalte der Veranstaltung

1. Lineare Optimierung

Inhalte der Veranstaltung

1. Lineare Optimierung
2. Graphentheoretische Grundlagen

Inhalte der Veranstaltung

1. Lineare Optimierung
2. Graphentheoretische Grundlagen
3. Das klassische Transportproblem

Inhalte der Veranstaltung

1. Lineare Optimierung
2. Graphentheoretische Grundlagen
3. Das klassische Transportproblem
4. Ganzzahlige Optimierung: Branch & Bound

Inhalte der Veranstaltung

1. Lineare Optimierung
2. Graphentheoretische Grundlagen
3. Das klassische Transportproblem
4. Ganzzahlige Optimierung: Branch & Bound
5. Netzplantechnik

Inhalte der Veranstaltung

1. Lineare Optimierung
2. Graphentheoretische Grundlagen
3. Das klassische Transportproblem
4. Ganzzahlige Optimierung: Branch & Bound
5. Netzplantechnik
6. Optimierung bei mehrfacher Zielsetzung

Inhalte der Veranstaltung

1. Lineare Optimierung
2. Graphentheoretische Grundlagen
3. Das klassische Transportproblem
4. Ganzzahlige Optimierung: Branch & Bound
5. Netzplantechnik
6. Optimierung bei mehrfacher Zielsetzung
7. Modellierung

Software: Julia statt GAMS

! Neu: Wir modellieren mit Julia

In dieser Veranstaltung lösen wir Optimierungsprobleme mit **Julia**, dem Paket **JuMP** und dem Solver **HiGHS**. Julia ersetzt GAMS vollständig und ist **klausurrelevant**.

- Einstieg ohne Vorkenntnisse: siehe [Julia · Installation & Setup](#)
- Organisation weiterhin über **OpenOlat** und den **Klausurtrainer**

OpenOlat

The screenshot shows the OpenOlat interface for a course. At the top is a blue navigation bar with 'UNIVERSITÄT HAMBURG' and various menu items like 'INFOS', 'KURSE', 'GRUPPEN', etc. Below this is a breadcrumb trail: 'Grundlagen Operations Research (Bache...'. A secondary bar contains 'Administration', 'Veröffentlicht' (with a green checkmark), 'Status', 'Kursinfo', 'Besitzer:in', 'Rolle', and 'Mein Kurs'. On the left is a sidebar menu for 'GOR WiSe 24/25' with items like 'Neuigkeiten', 'Einleitung', 'Organisation', 'Freischaltungen', 'Übungsvideos', 'Klausurtrainer', 'Materialien', 'FAQs', and 'Kontakt'. The main content area is titled 'Aktuelle Neuigkeiten zur Veranstaltung' and features a post from October 11, 2024, titled 'Herzlich willkommen!'. The post text welcomes students and provides information about the course organization. At the bottom of the post are 'Bearbeiten' and 'Löschen' buttons. A 'Neue Mitteilung erstellen' button is also visible.

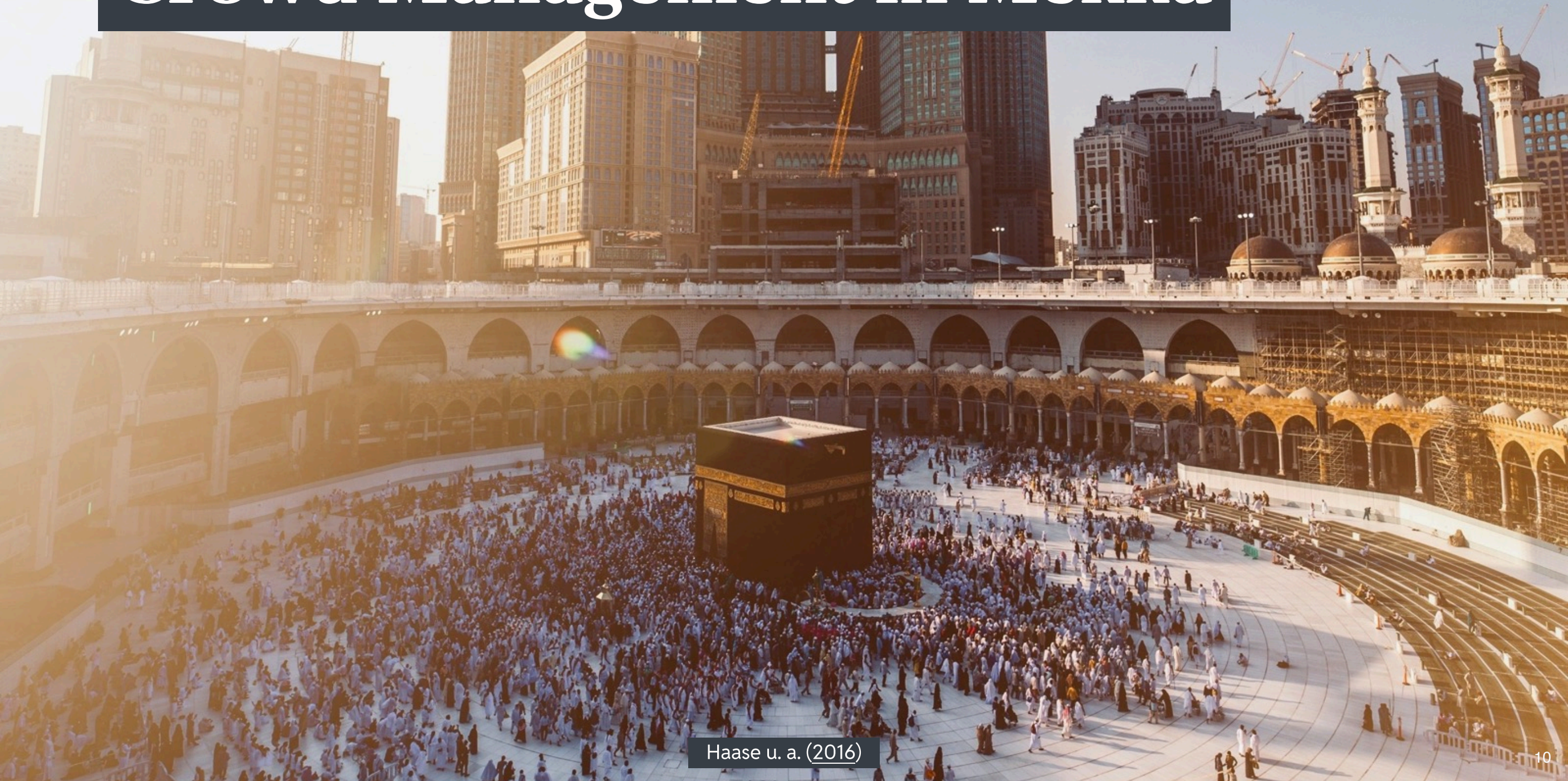
Noch nie mit OpenOlat gearbeitet?

Wir laden Sie erst in den Kurs ein, nachdem Sie sich einmal angemeldet haben, bitte zeitnah:

openolat.uni-hamburg.de

Praxisrelevanz

Crowd Management in Mekka



Haase u. a. (2016)

Planung der Pilgerströme

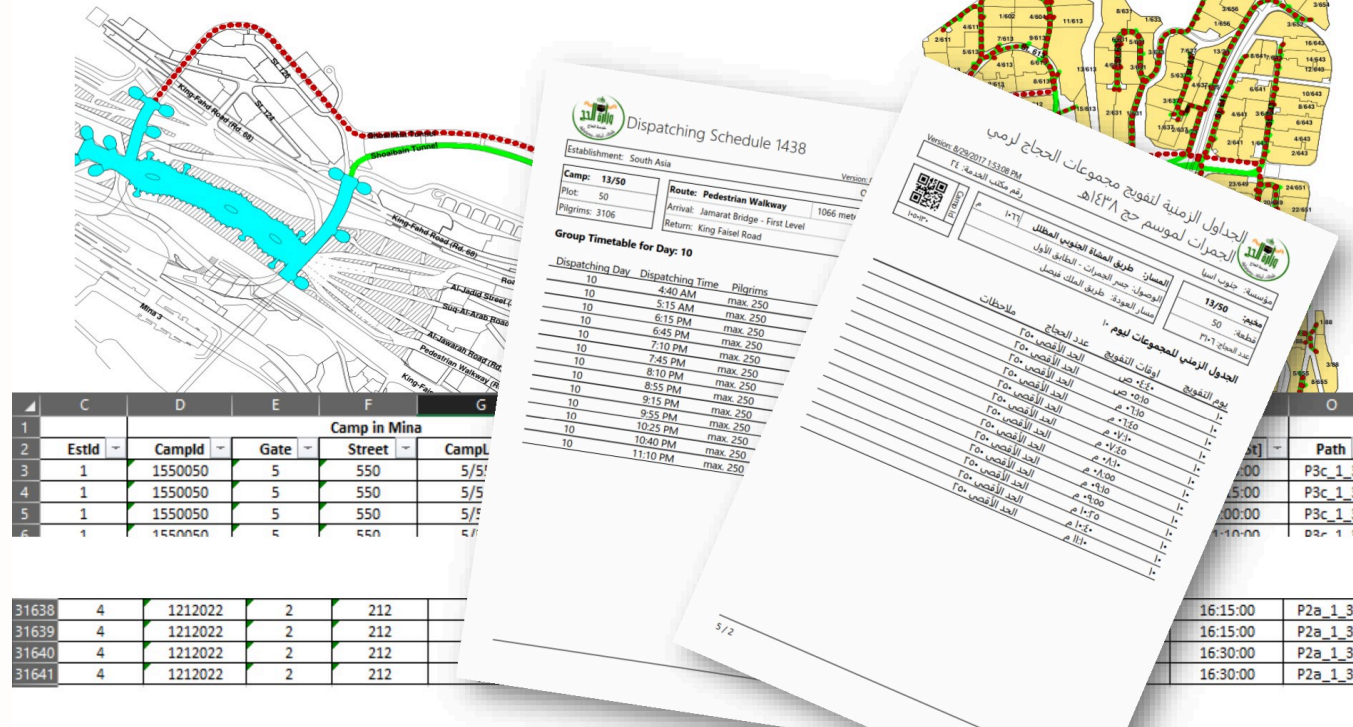
Planungsergebnisse



Planung der Pilgerströme

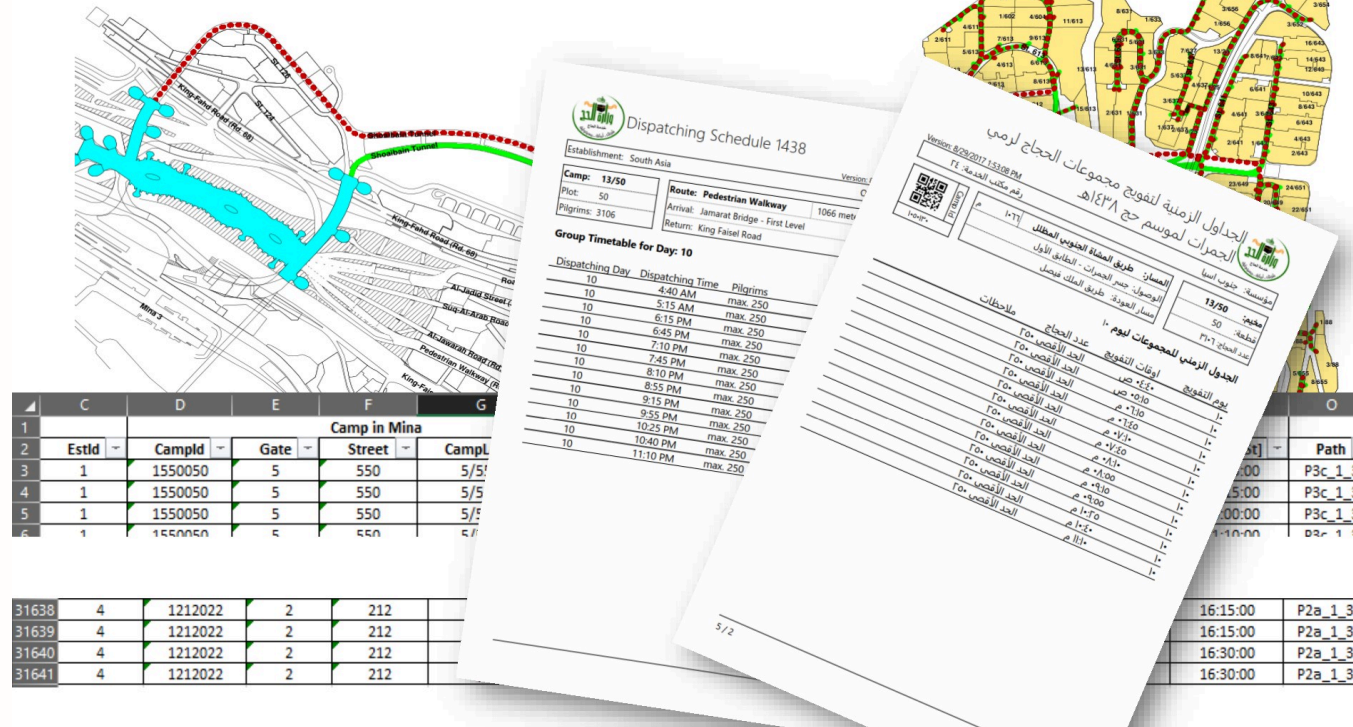
Planungsergebnisse

- Zeitpläne und Routen für die Pilgerströme zum Hadsch



Planung der Pilgerströme

Planungsergebnisse

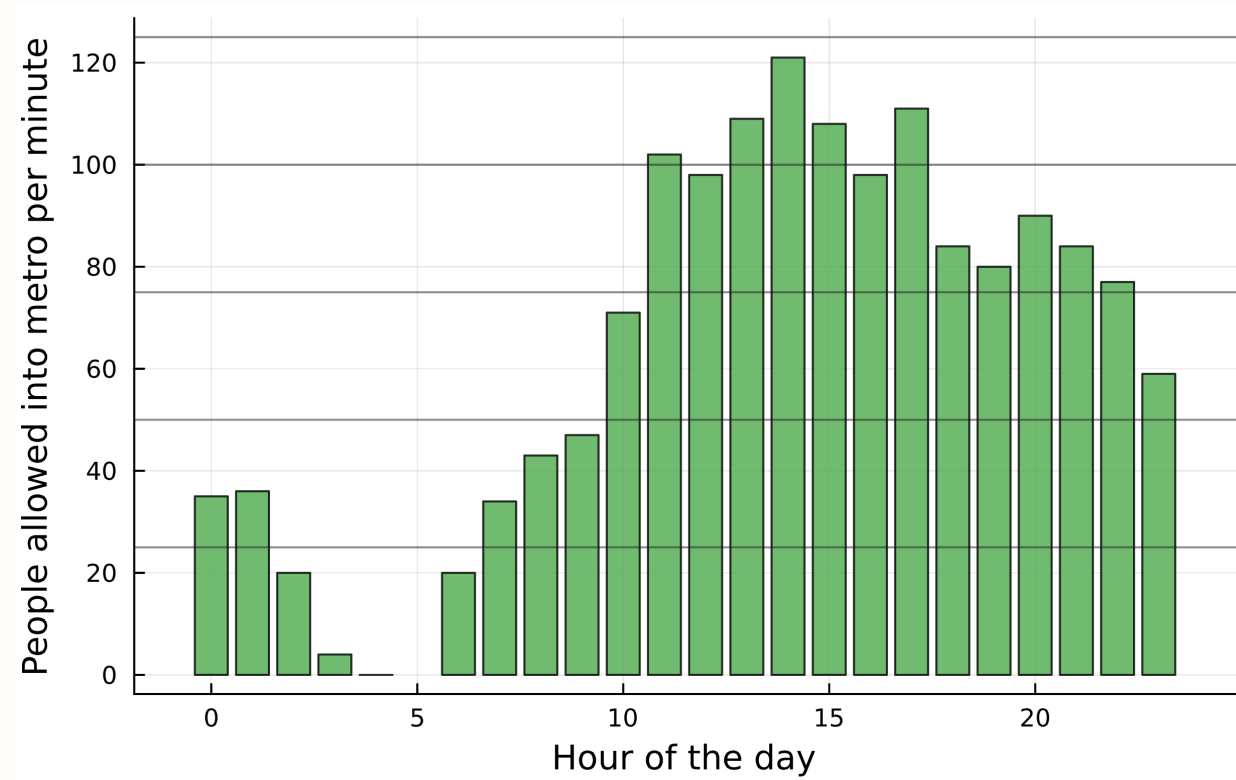


- Zeitpläne und Routen für die Pilgerströme zum Hadsch
- Modell: *Path Assignment and Timetabling*

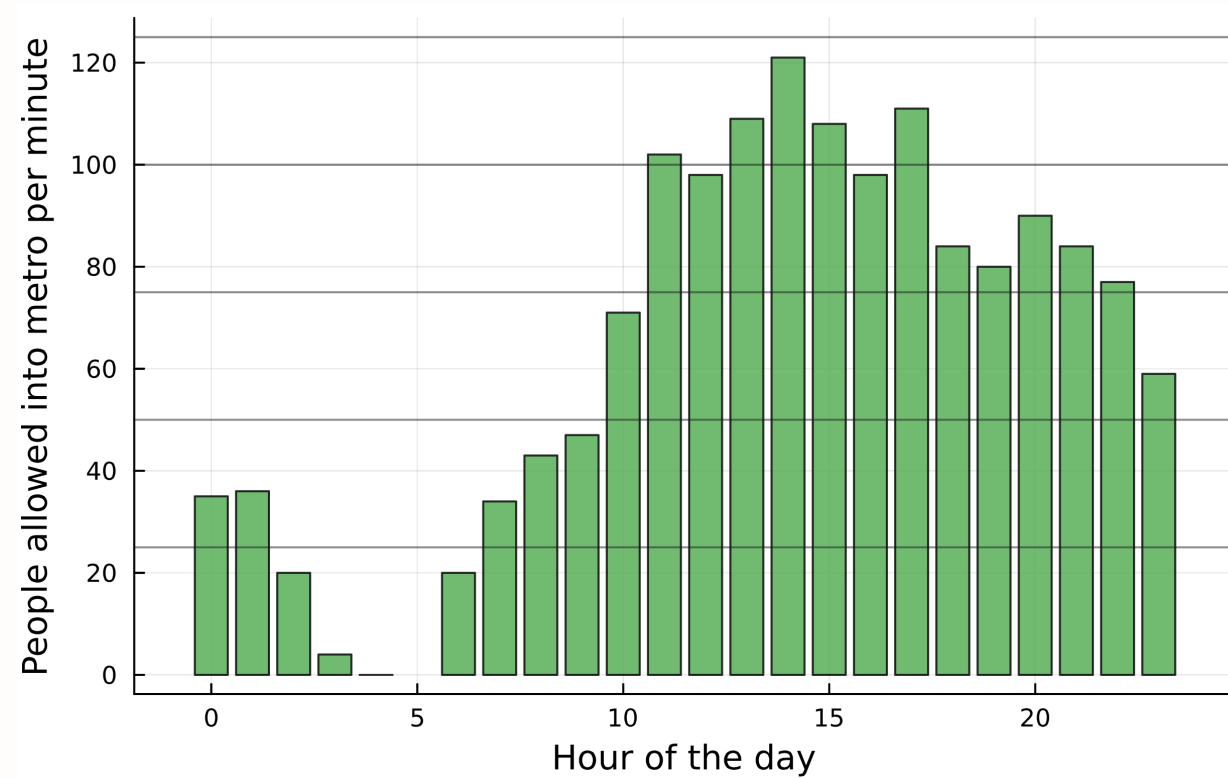
Metro-Zufluss in Doha



Gesteuerter Metro-Zufluss

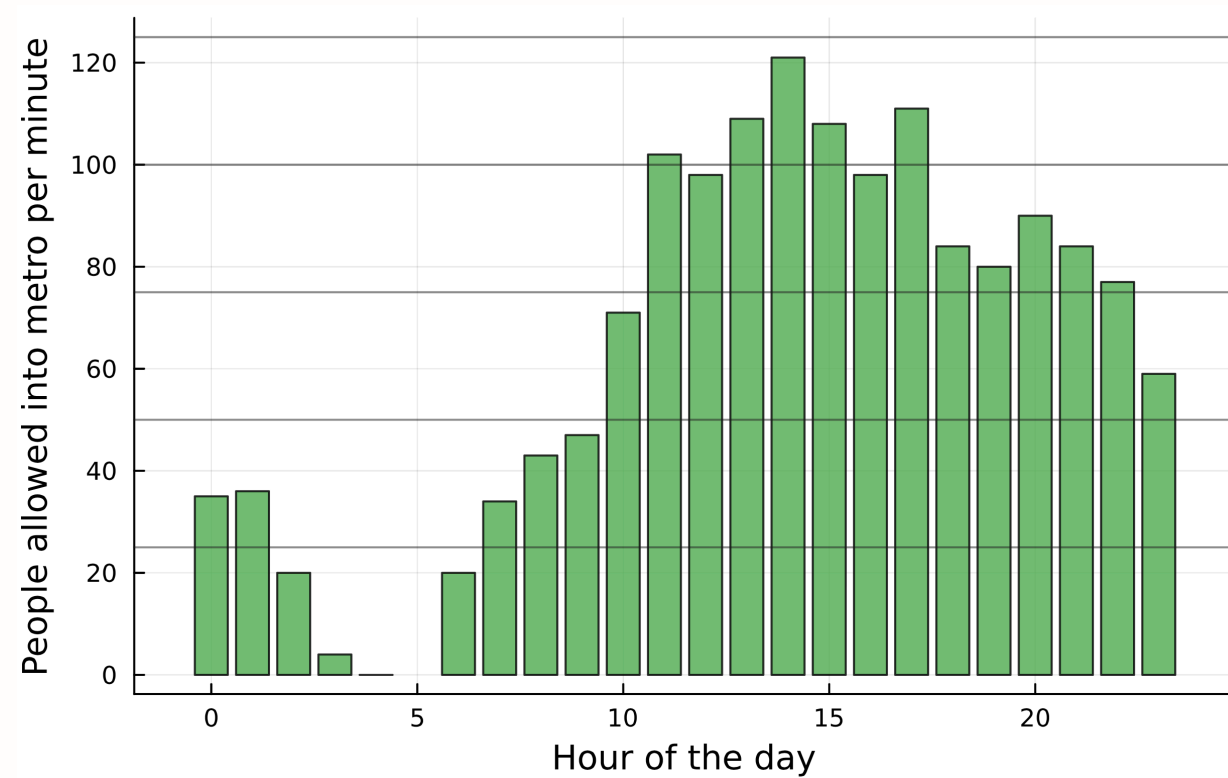


Gesteuerter Metro-Zufluss



- Einlasssteuerung **nach Großveranstaltungen**

Gesteuerter Metro-Zufluss

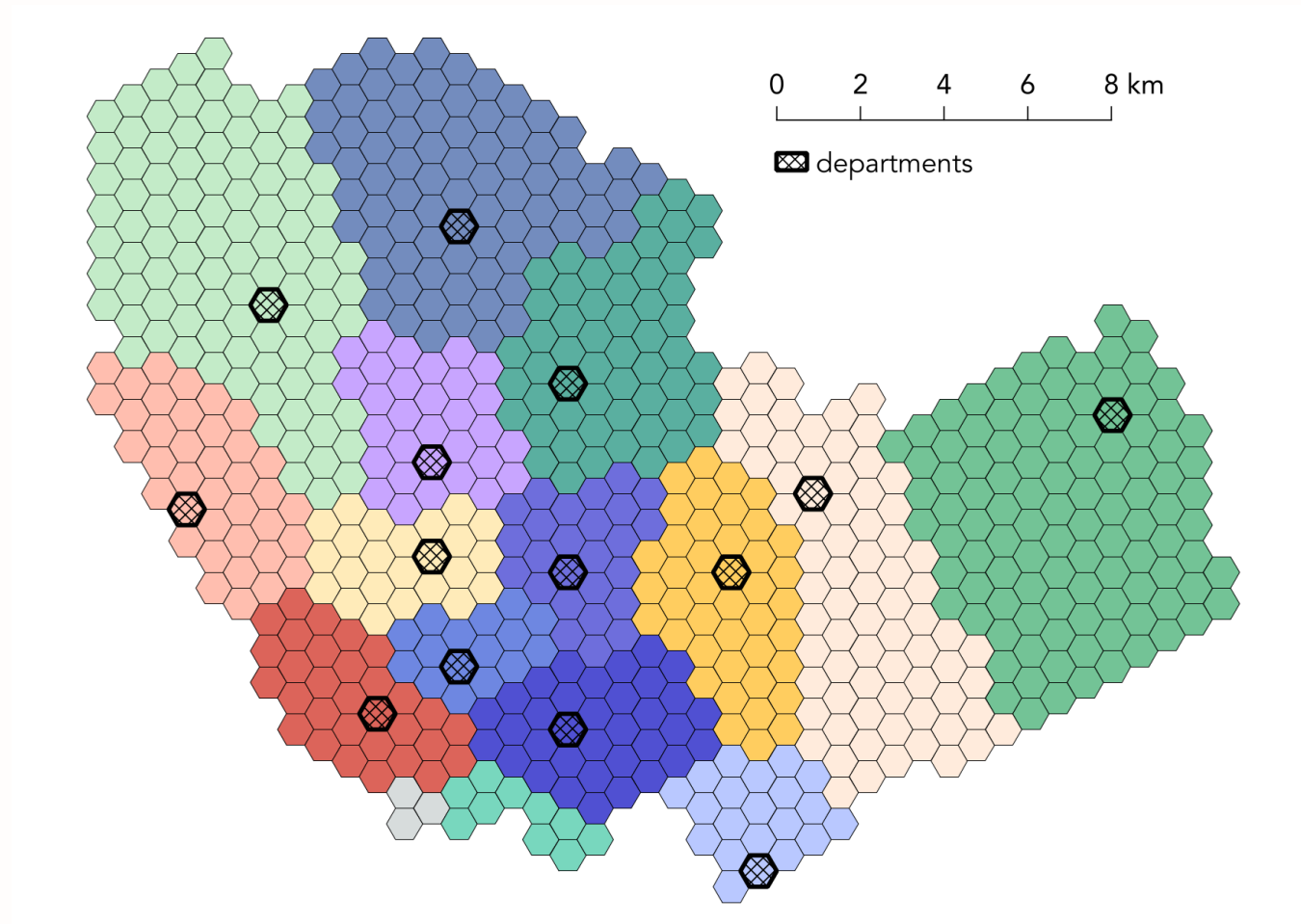


- Einlasssteuerung **nach Großveranstaltungen**
- Ergebnis: zulässige **Einlassraten** je Stunde

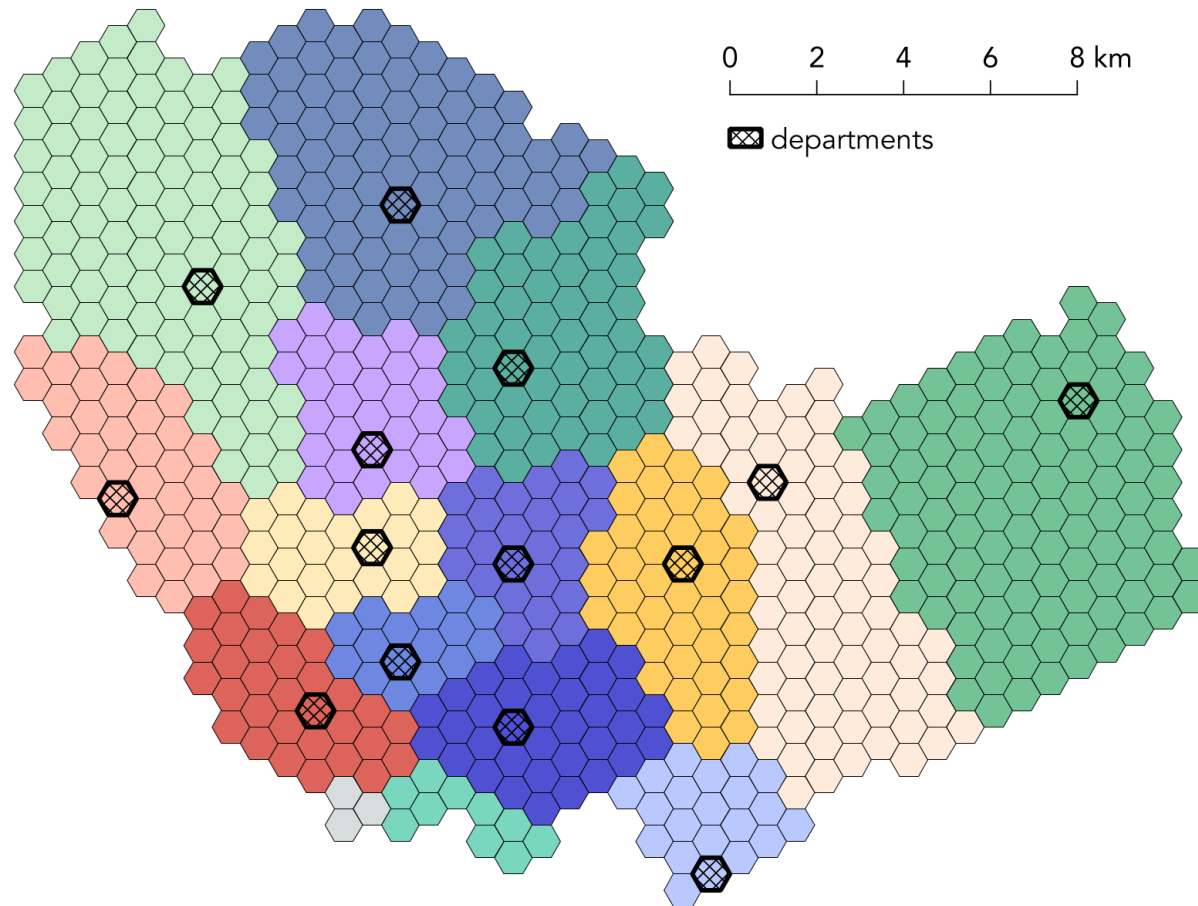
Polizei-Distriktplanung



Zuschnitt von Polizeibezirken

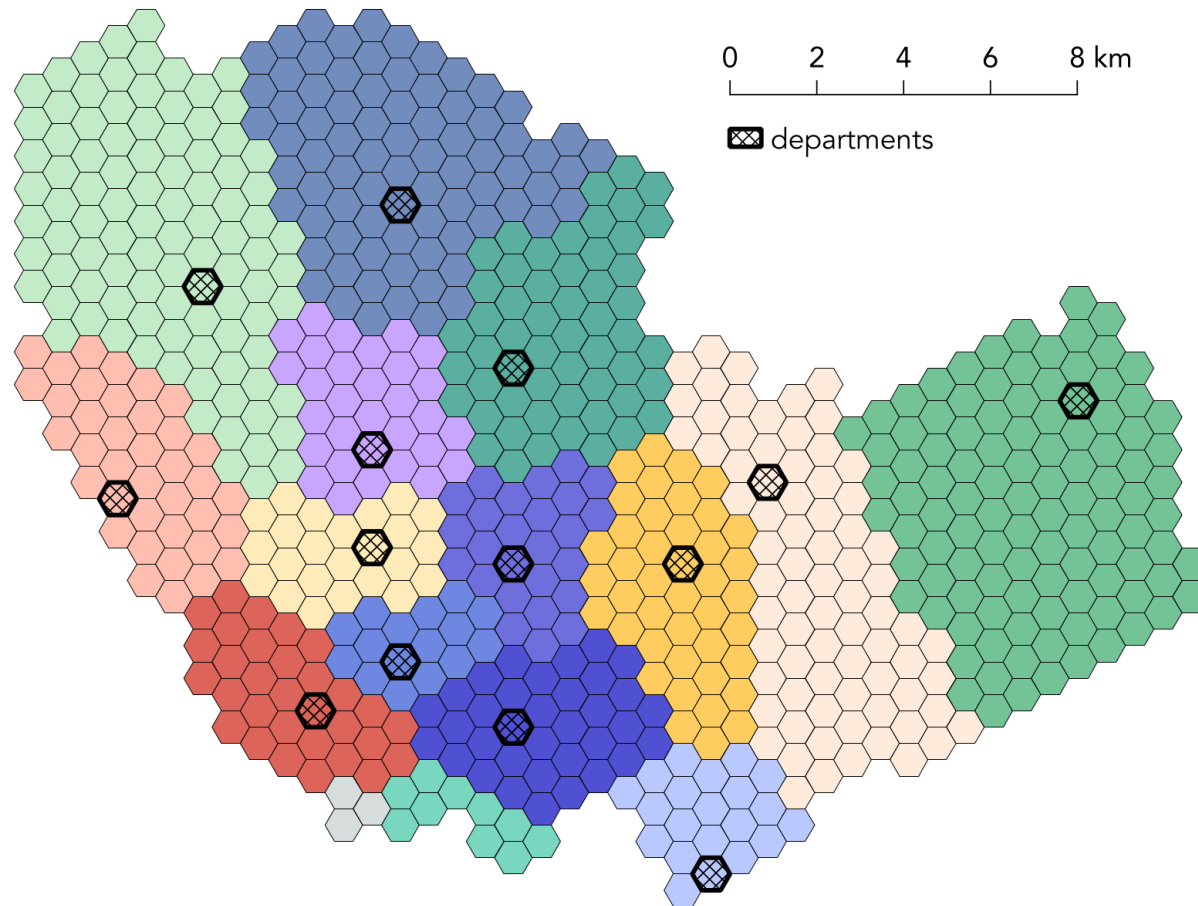


Zuschnitt von Polizeibezirken



- Optimaler **Zuschnitt** der Bezirke um die Wachen

Zuschnitt von Polizeibezirken

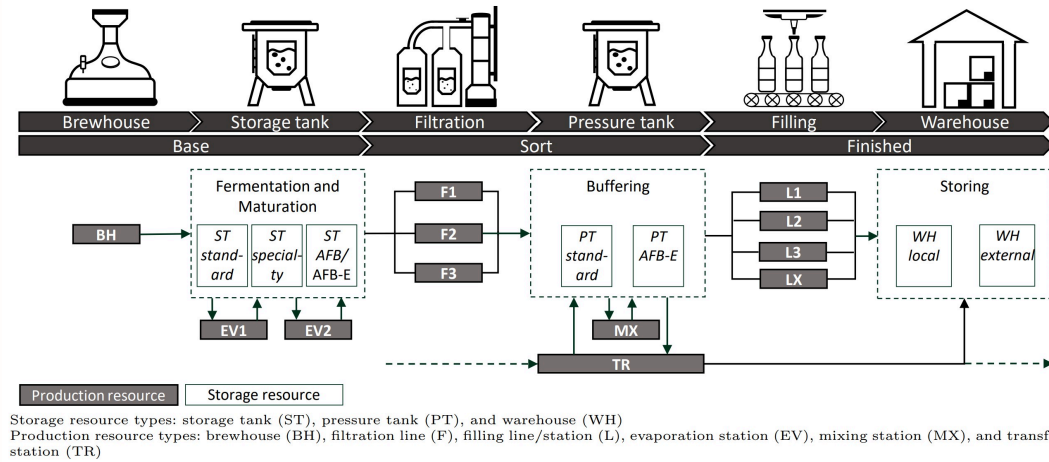


- Optimaler **Zuschnitt** der Bezirke um die Wachen
- Ziele: kurze Wege, **ausgeglichene Auslastung**

Brauerei-Produktionsplanung

A large, polished wooden barrel, likely a beer cask, is the central focus of the image. It has a curved metal band with a small handle. The background is a blurred view of a brewery interior, showing other barrels and equipment.

Von der Forschung in die Lehre



Losgrößen- & Ressourcenplanung (Brauerei):
 Mickein u. a. (2022)



Lehrgangsplanung: Haase u. a. (1999)

Anwendungsfelder des OR

Anwendungsfelder des OR

- Flugrouten- und Crew-Planung ([Desrosiers u. a. 2000](#))

Anwendungsfelder des OR

- Flugrouten- und Crew-Planung ([Desrosiers u. a. 2000](#))
- Bettenmanagement in Krankenhäusern ([Thomas u. a. 2013](#))

Anwendungsfelder des OR

- Flugrouten- und Crew-Planung ([Desrosiers u. a. 2000](#))
- Bettenmanagement in Krankenhäusern ([Thomas u. a. 2013](#))
- Einsatzplanung von Eisenbahnpersonal ([Jütte u. a. 2011](#))

Anwendungsfelder des OR

- Flugrouten- und Crew-Planung ([Desrosiers u. a. 2000](#))
- Bettenmanagement in Krankenhäusern ([Thomas u. a. 2013](#))
- Einsatzplanung von Eisenbahnpersonal ([Jütte u. a. 2011](#))
- Schiedsrichter-Zuordnung in der Baseball-Liga ([Trick u. a. 2012](#))

Anwendungsfelder des OR

- Flugrouten- und Crew-Planung ([Desrosiers u. a. 2000](#))
- Bettenmanagement in Krankenhäusern ([Thomas u. a. 2013](#))
- Einsatzplanung von Eisenbahnpersonal ([Jütte u. a. 2011](#))
- Schiedsrichter-Zuordnung in der Baseball-Liga ([Trick u. a. 2012](#))
- Spielpläne im Profisport ([Westphal 2014](#))

Internationalisierung

Gesellschaften

- **GOR**: Gesellschaft für OR
- **EURO**: European OR Societies
- **INFORMS**: OR & Management Sciences
- **IFORS**: International Federation

Zeitschriften (Auswahl)

- European Journal of OR
- Management Science
- Operations Research
- OR Spectrum

Auszeichnungen

- **2021:** Best Paper Award VHB
- **2021:** EURO Excellence in Practice Award (Finalist, 2. Platz)
- **2015:** INFORMS Franz Edelman Award (Finalist)

Lineare Modelle

Lineares Optimierungsproblem

Ein LOP besitzt eine lineare **Zielfunktion** und ausschließlich lineare **Nebenbedingungen**.

Allgemeine Form

$$\text{maximiere } F = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_J X_J$$

$$\text{u.d.N.} \quad a_{i1} X_1 + \dots + a_{iJ} X_J \leq b_i \quad \forall i$$

$$X_j \geq 0 \quad \forall j$$

X_j Entscheidungsvariable, c_j Zielkoeffizient, a_{ij} , b_i Parameter.

Eine Tour, zwei Angebote

Beispiel aus der Logistik

Ein Frachtführer bedient die Relation **Hamburg–Kiel**. Für eine Fahrt stehen noch **5 Palettenstellplätze** zur Verfügung; die Zuladung darf **9 Tonnen** nicht überschreiten. Über eine Frachtbörse erhält er **zwei Auftragsangebote**.

Beispiel aus der Logistik

Ein Frachtführer bedient die Relation **Hamburg–Kiel**. Für eine Fahrt stehen noch **5 Palettenstellplätze** zur Verfügung; die Zuladung darf **9 Tonnen** nicht überschreiten. Über eine Frachtbörse erhält er **zwei Auftragsangebote**.

! Fragestellung

Wie viele Paletten je Angebot maximieren seine **Erlöse** (F)?

Die Daten

Auftrag	Stückerlös	Paletten	Tonnen
1	20	1	1
2	30	1	3
LKW-Kapazität		5	9

Die Daten

Auftrag	Stückerlös	Paletten	Tonnen
1	20	1	1
2	30	1	3
LKW-Kapazität		5	9

Gesucht: die **erlösmaximale** Übernahme an Aufträgen.

Die Daten

Auftrag	Stückerlös	Paletten	Tonnen
1	20	1	1
2	30	1	3
LKW-Kapazität		5	9

Gesucht: die **erlösmaximale** Übernahme an Aufträgen.



Gleich ausprobieren

Auf der nächsten Folie beladen Sie den LKW selbst, am Handy über den QR-Code. Wie viel Erlös holen Sie heraus?

Sie sind dran

Welche Ladung bringt den höchsten Erlös? Tippen Sie auf einen Auftrag, um eine Palette zu laden, und auf eine geladene Palette, um sie wieder abzuladen. Stellplätze und Zuladung sind begrenzt.



Stellplätze: 0 von 5



Zuladung: 0 von 9 t



Eigener Plan 0 €

Bereit: „Optimieren“
vergleicht den Plan
mit dem besten.

Optimieren

Reset

Neu

Warum grafisch lösen?

Im Spiel haben Sie Paletten ausprobiert. Jetzt lösen wir dasselbe Problem **grafisch**.



Bei **zwei** Entscheidungsvariablen können wir jede zulässige Lösung als Punkt in der Ebene zeichnen. Die Zielfunktion wird zu einer **Geraden**, die wir so weit wie möglich in Richtung besserer Werte verschieben.

Das gibt uns ein Gefühl dafür, *warum* die optimale Lösung an einer **Ecke** des zulässigen Bereichs liegt, bevor wir später rechnerisch (Simplex) vorgehen.

Zielfunktion

Entscheidungsvariablen

Zielfunktion

Entscheidungsvariablen

- X_1 : Abnahmemenge gemäß Auftrag 1

Zielfunktion

Entscheidungsvariablen

- X_1 : Abnahmemenge gemäß Auftrag 1
- X_2 : Abnahmemenge gemäß Auftrag 2

Zielfunktion

Entscheidungsvariablen

- X_1 : Abnahmemenge gemäß Auftrag 1
- X_2 : Abnahmemenge gemäß Auftrag 2
- F : Erlöse in EUR

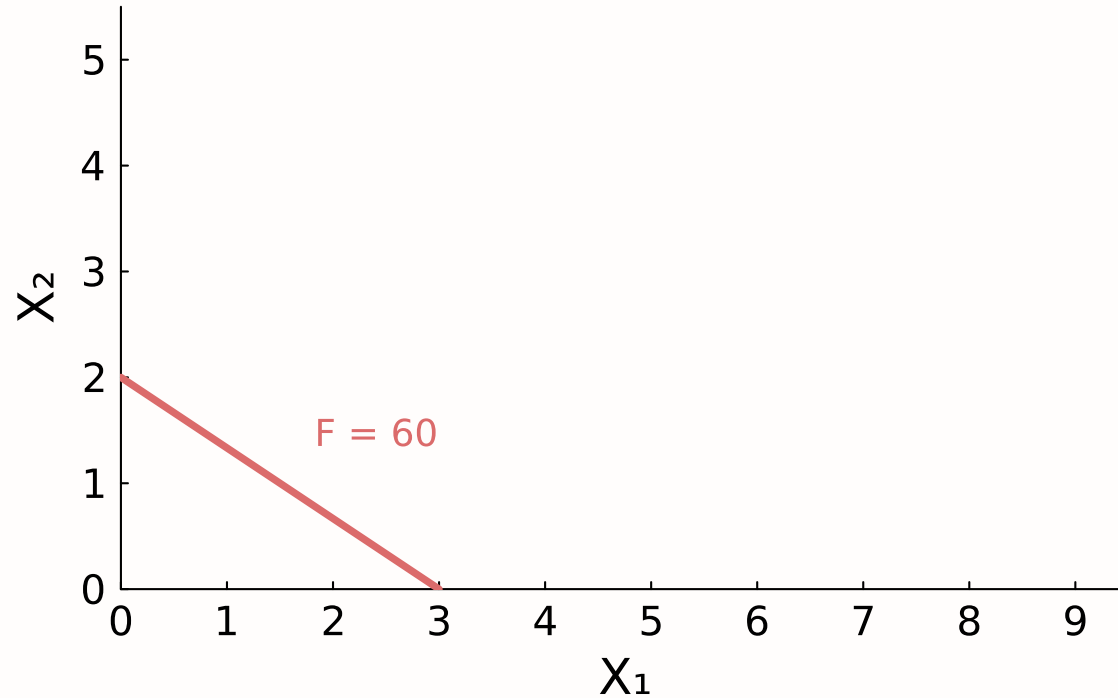
Zielfunktion

Entscheidungsvariablen

- X_1 : Abnahmemenge gemäß Auftrag 1
- X_2 : Abnahmemenge gemäß Auftrag 2
- F : Erlöse in EUR

$$\text{maximiere } F(X_1, X_2) = 20 X_1 + 30 X_2$$

Zielfunktionsgerade für $F = 60$

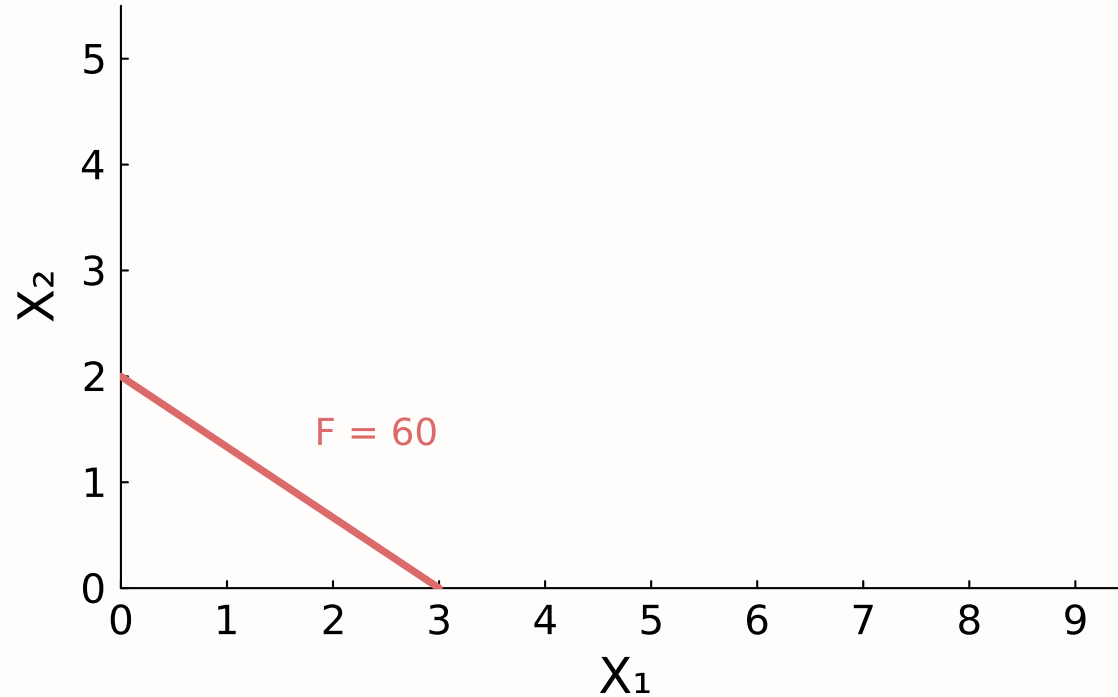


Wir geben einen Zielwert vor, z.

B. $F = 60$:

$$60 = 20 X_1 + 30 X_2$$
$$\Rightarrow X_2 = 2 - \frac{2}{3} X_1$$

Zielfunktionsgerade für $F = 60$



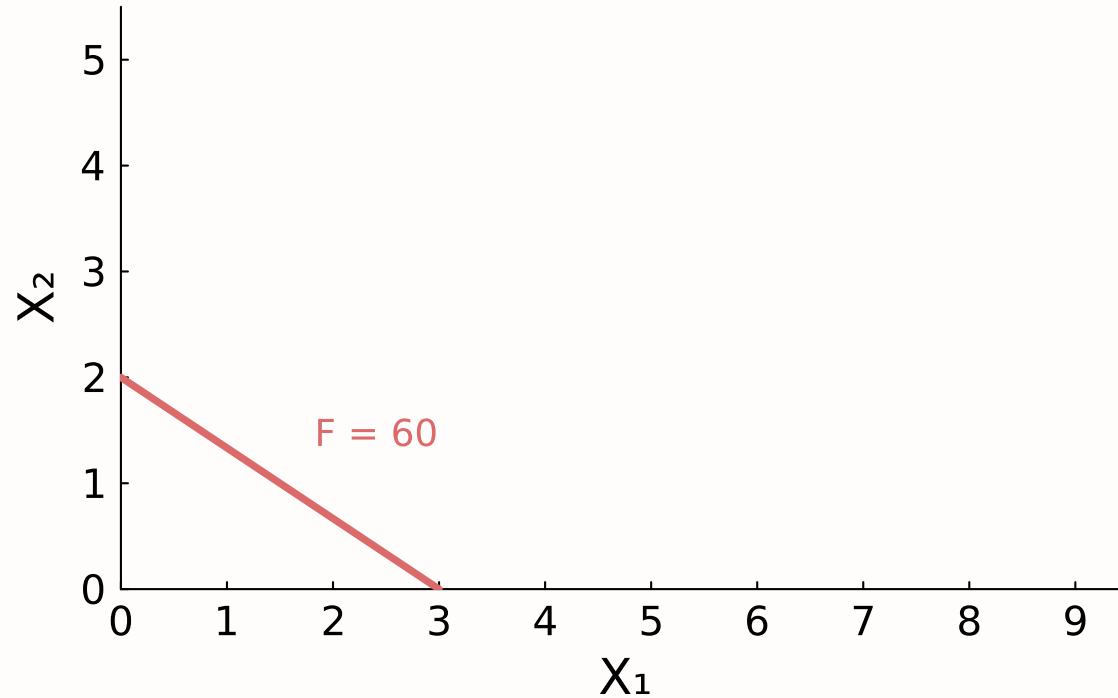
Wir geben einen Zielwert vor, z.

B. $F = 60$:

$$60 = 20 X_1 + 30 X_2$$
$$\Rightarrow X_2 = 2 - \frac{2}{3} X_1$$

- $X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 2$

Zielfunktionsgerade für $F = 60$



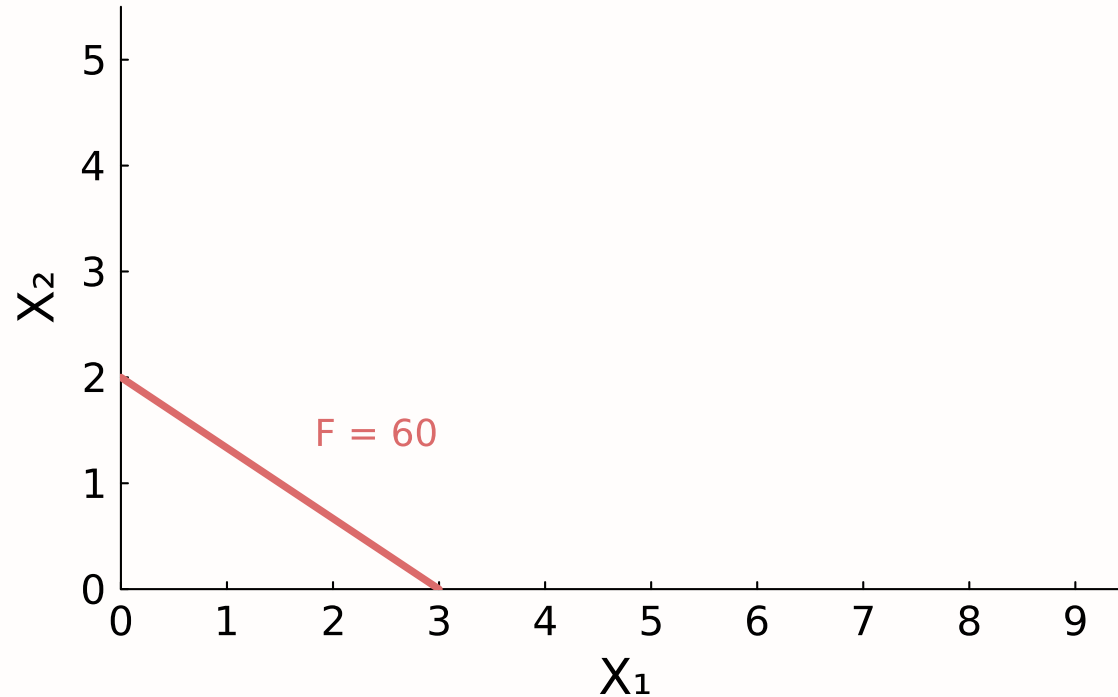
Wir geben einen Zielwert vor, z.

B. $F = 60$:

$$60 = 20 X_1 + 30 X_2$$
$$\Rightarrow X_2 = 2 - \frac{2}{3} X_1$$

- $X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 2$
- $X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 3$

Zielfunktionsgerade für $F = 60$



Wir geben einen Zielwert vor, z.

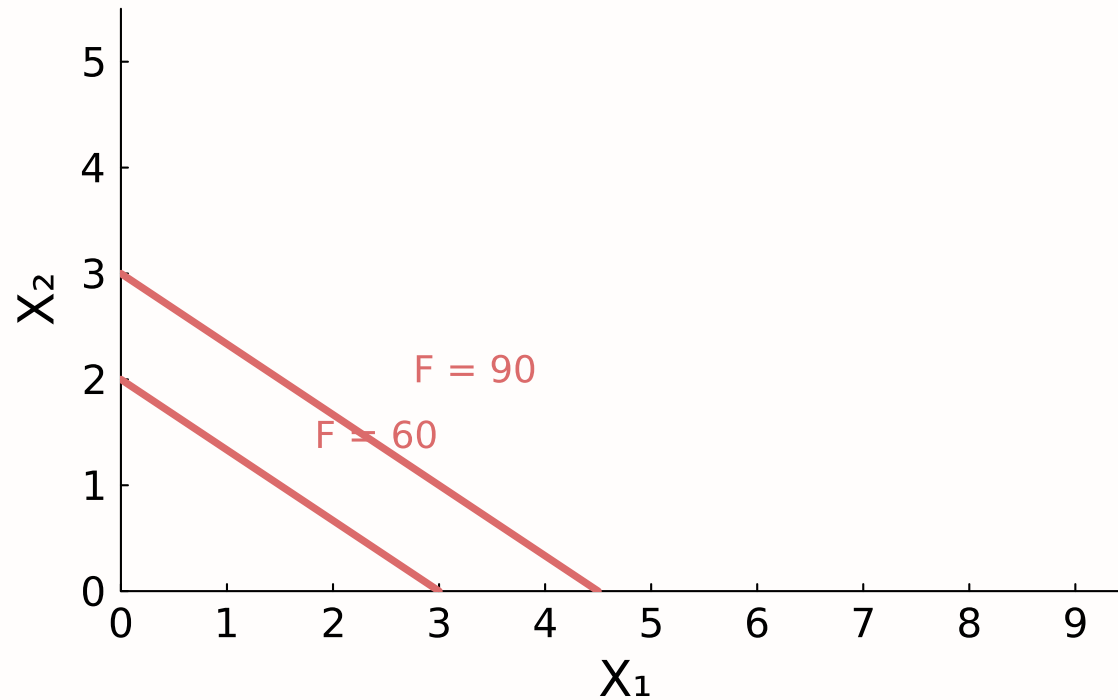
B. $F = 60$:

$$60 = 20 X_1 + 30 X_2$$
$$\Rightarrow X_2 = 2 - \frac{2}{3} X_1$$

- $X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 2$
- $X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 3$

Jeder Punkt liefert denselben Erlös.

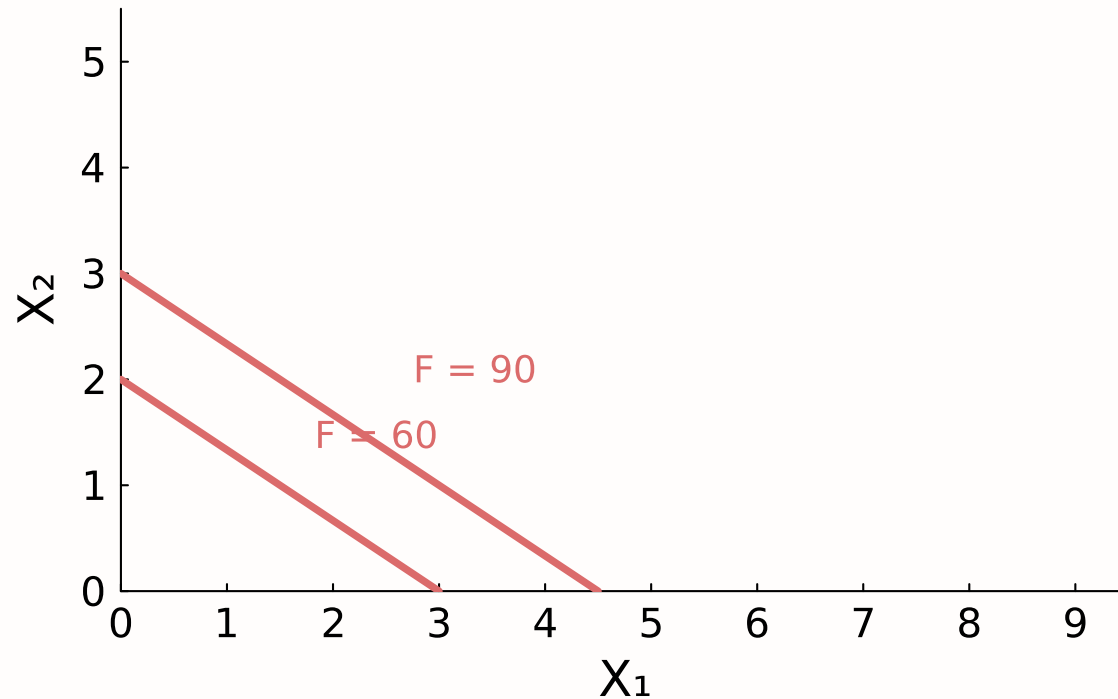
Zielgerade verschieben



Erhöhen wir den Zielwert auf
 $F = 90$:

$$90 = 20 X_1 + 30 X_2$$
$$\Rightarrow X_2 = 3 - \frac{2}{3} X_1$$

Zielgerade verschieben

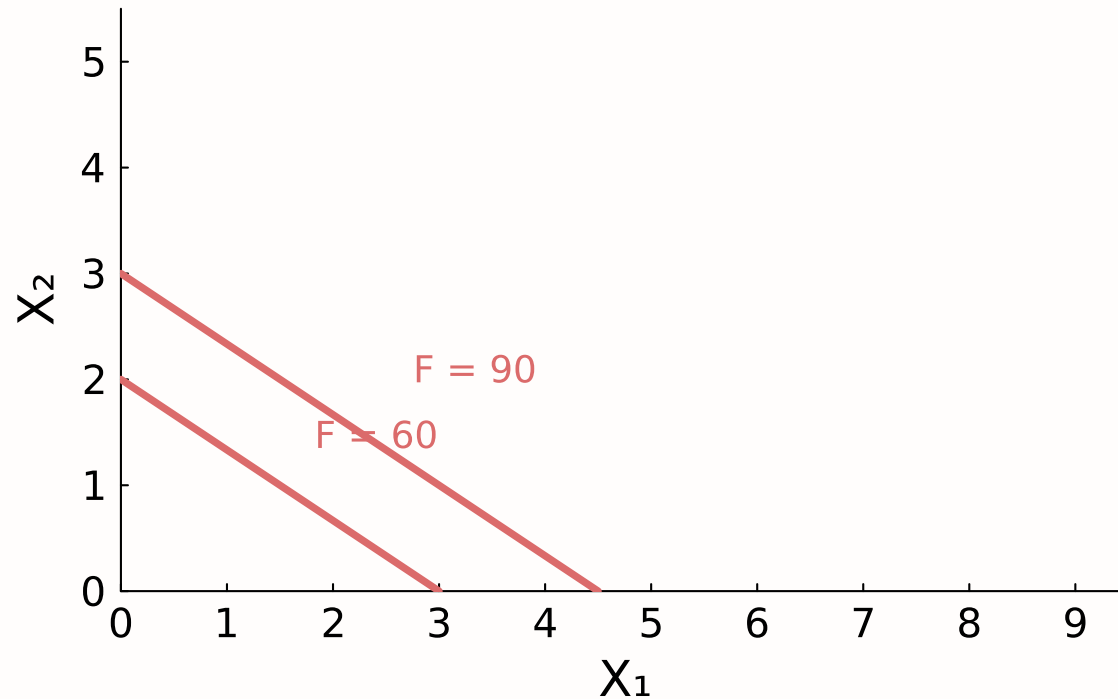


Erhöhen wir den Zielwert auf
 $F = 90$:

$$90 = 20 X_1 + 30 X_2$$
$$\Rightarrow X_2 = 3 - \frac{2}{3} X_1$$

- $X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 3$

Zielgerade verschieben

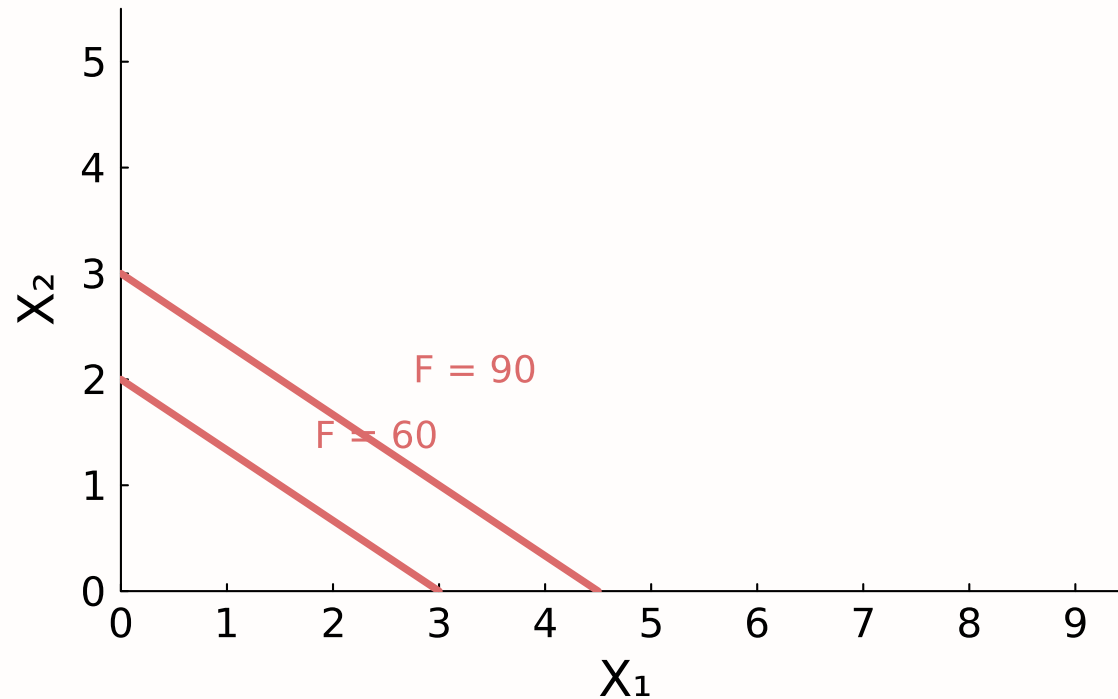


Erhöhen wir den Zielwert auf
 $F = 90$:

$$90 = 20 X_1 + 30 X_2$$
$$\Rightarrow X_2 = 3 - \frac{2}{3} X_1$$

- $X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 3$
- $X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 4,5$

Zielgerade verschieben



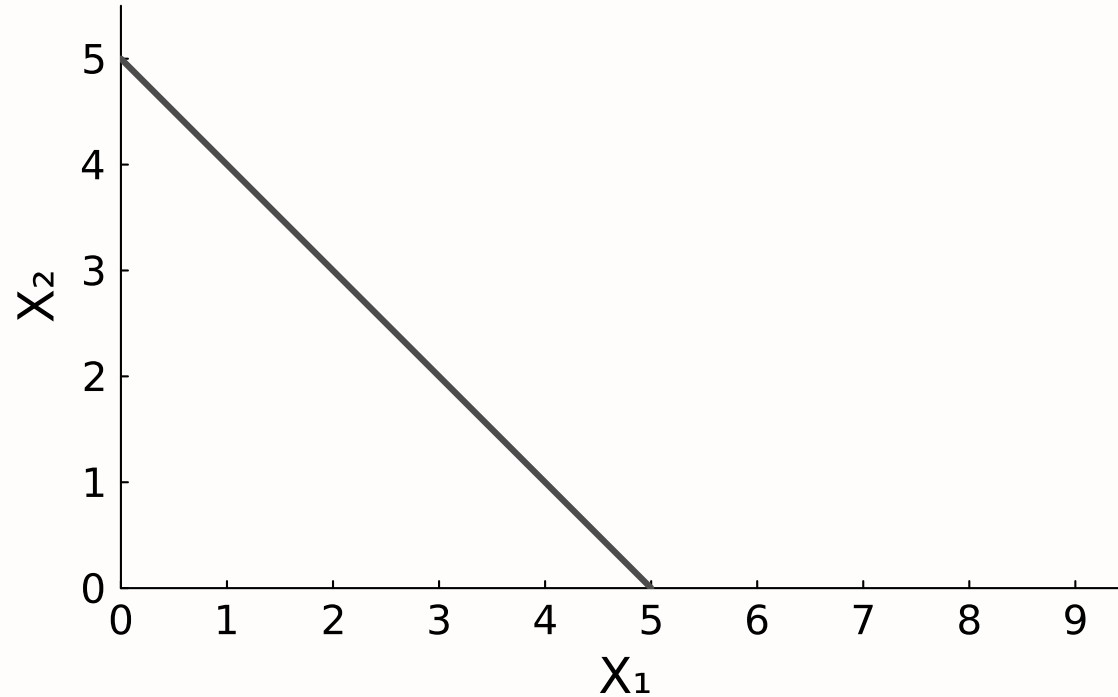
Erhöhen wir den Zielwert auf $F = 90$:

$$90 = 20 X_1 + 30 X_2 \\ \Rightarrow X_2 = 3 - \frac{2}{3} X_1$$

- $X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 3$
- $X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 4,5$

Die Gerade wandert **parallel nach rechts oben**.

Nebenbedingung: Paletten

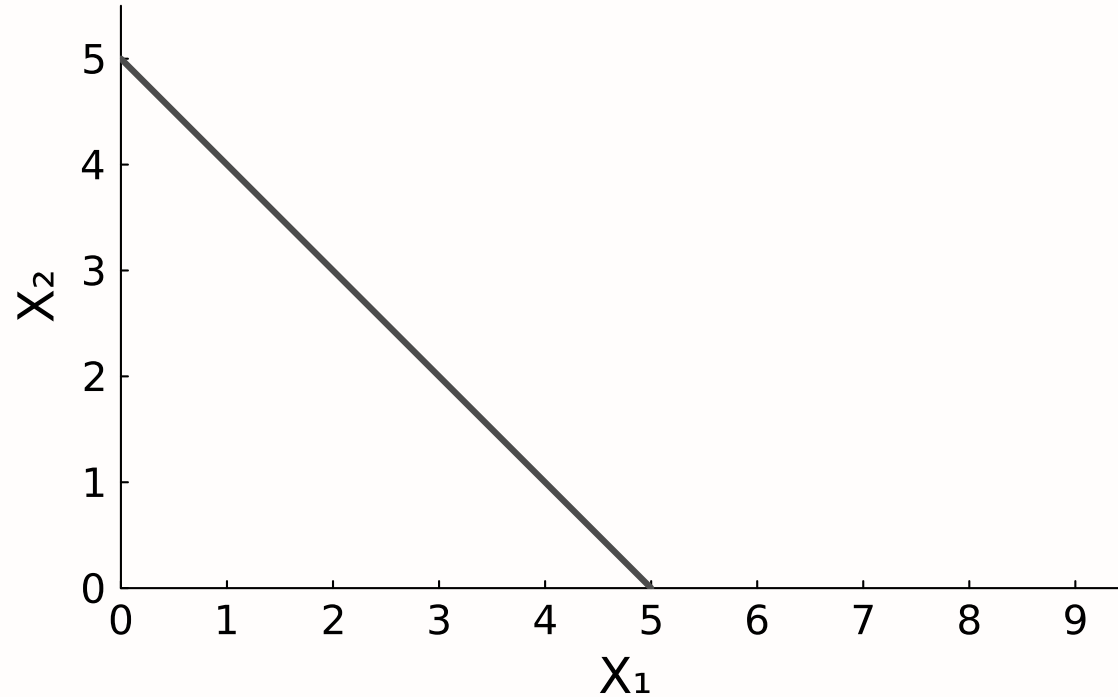


Je Abnahmemenge eine
Palette, höchstens 5:

$$X_1 + X_2 \leq 5$$

Grenzgerade $X_2 = 5 - X_1$:

Nebenbedingung: Paletten



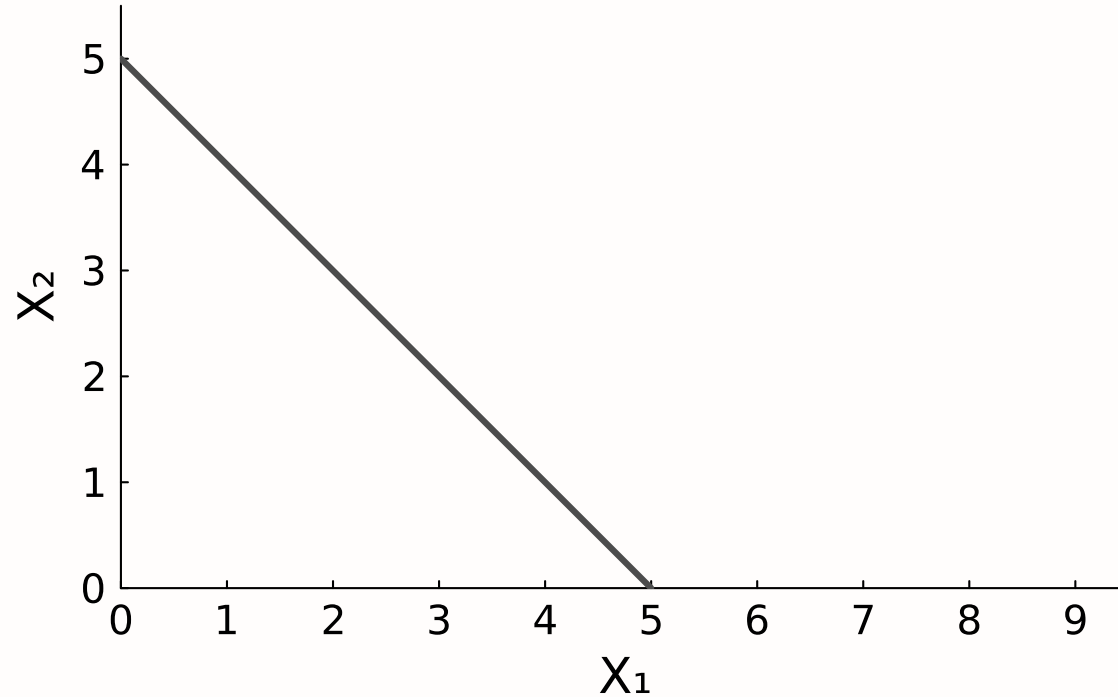
Je Abnahmemenge eine
Palette, höchstens 5:

$$X_1 + X_2 \leq 5$$

Grenzgerade $X_2 = 5 - X_1$:

- $X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 5$

Nebenbedingung: Paletten



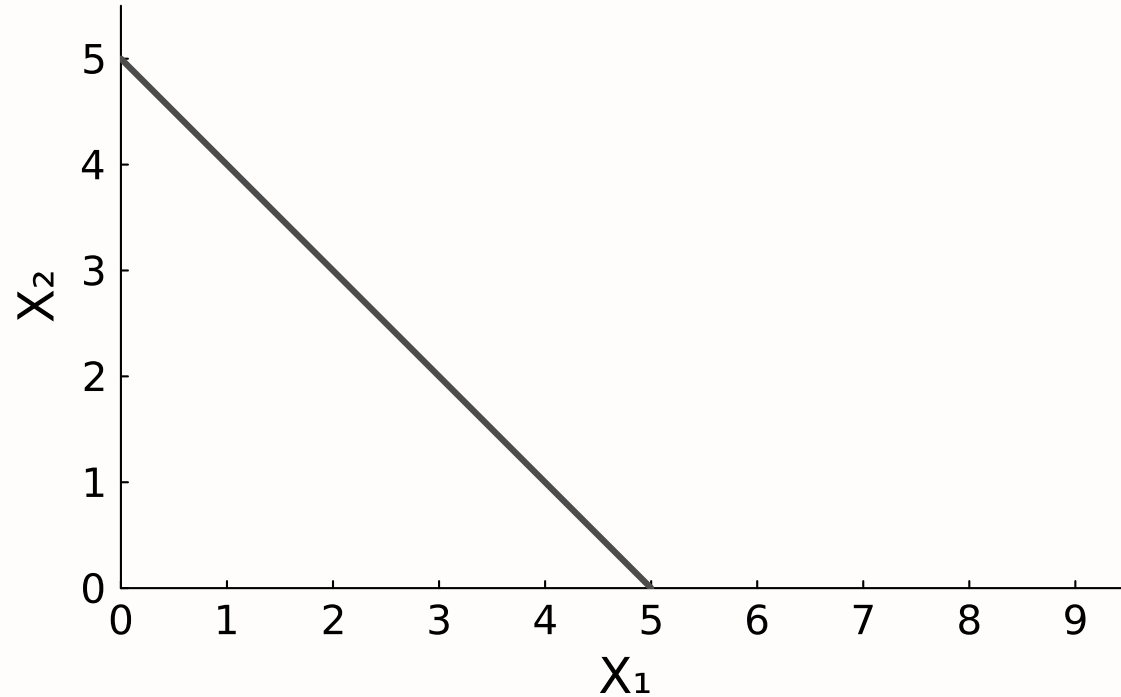
Je Abnahmemenge eine Palette, höchstens 5:

$$X_1 + X_2 \leq 5$$

Grenzgerade $X_2 = 5 - X_1$:

- $X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 5$
- $X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 5$

Nebenbedingung: Paletten



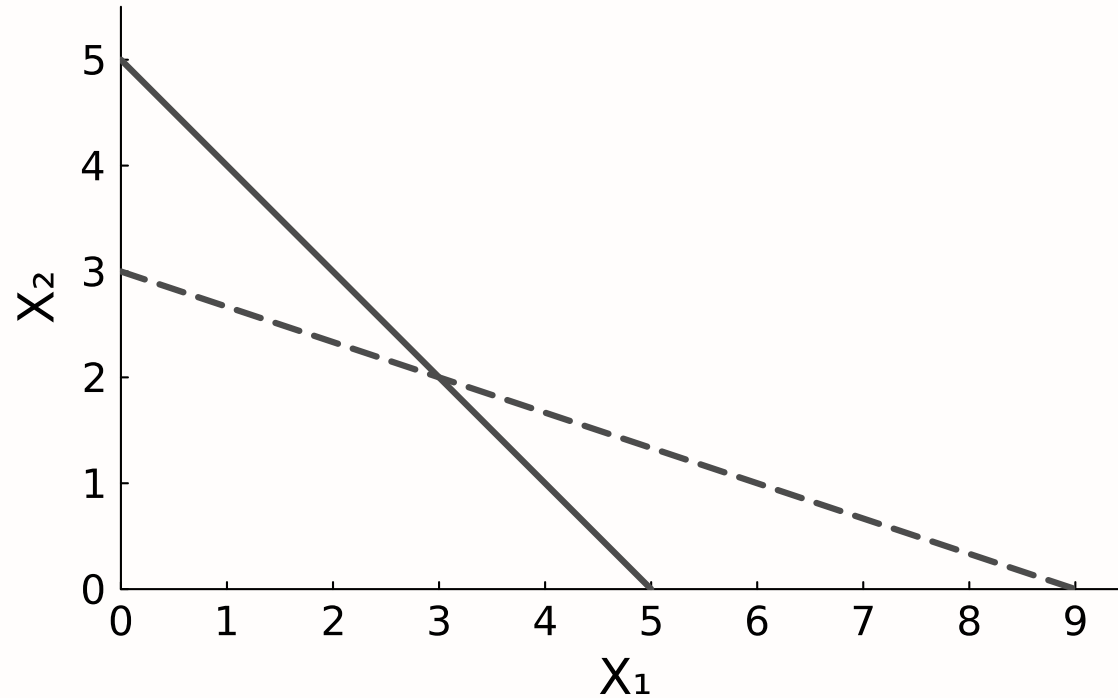
Je Abnahmemenge eine Palette, höchstens 5:

$$X_1 + X_2 \leq 5$$

Grenzgerade $X_2 = 5 - X_1$:

- $X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 5$
- $X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 5$
- zulässig: auf oder unterhalb

Nebenbedingung: Ladegewicht

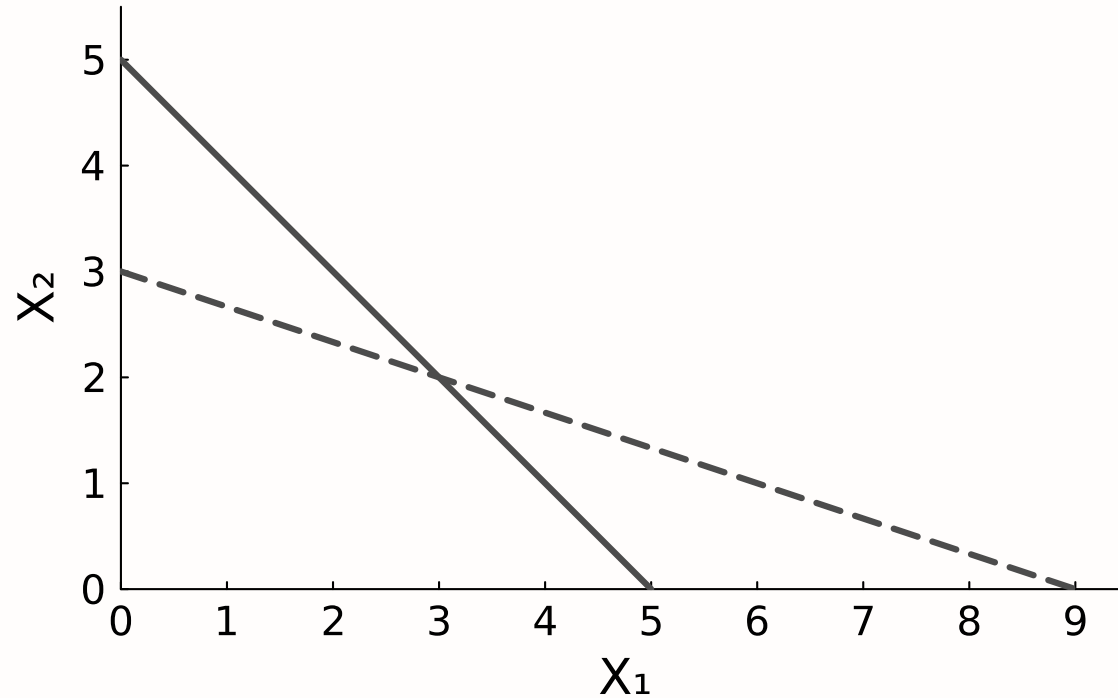


Auftrag 1 wiegt 1 t, Auftrag 2 wiegt 3 t, höchstens 9 t:

$$X_1 + 3X_2 \leq 9$$

Grenzgerade $X_2 = 3 - \frac{1}{3}X_1$:

Nebenbedingung: Ladegewicht



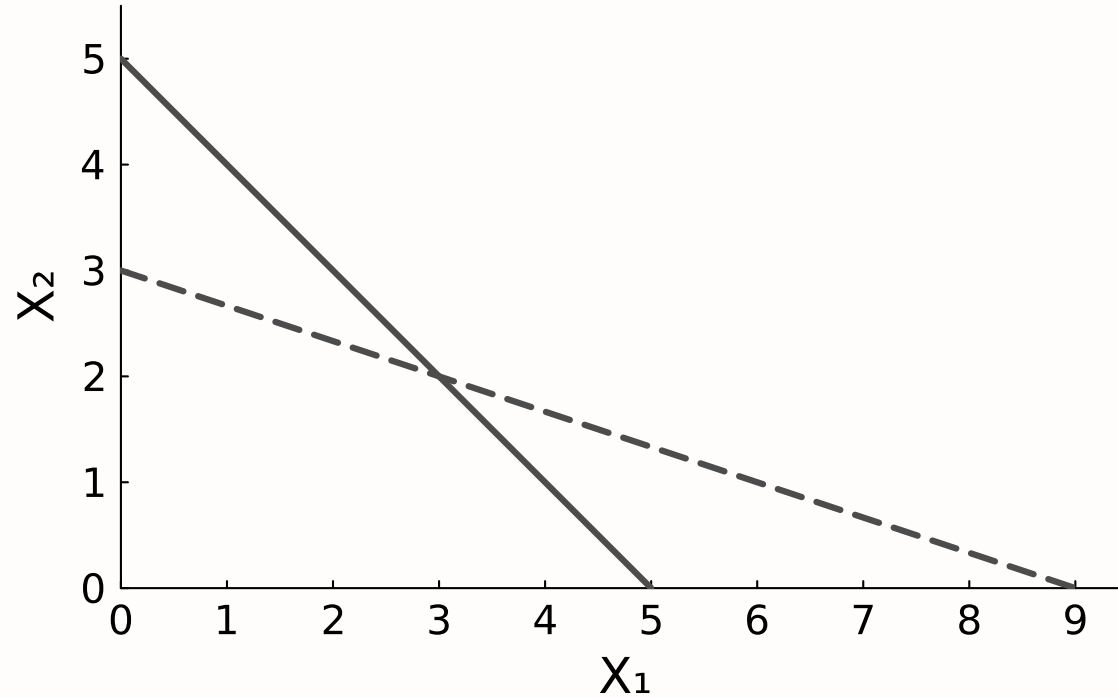
Auftrag 1 wiegt 1 t, Auftrag 2 wiegt 3 t, höchstens 9 t:

$$X_1 + 3X_2 \leq 9$$

Grenzgerade $X_2 = 3 - \frac{1}{3}X_1$:

- $X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 3$

Nebenbedingung: Ladegewicht



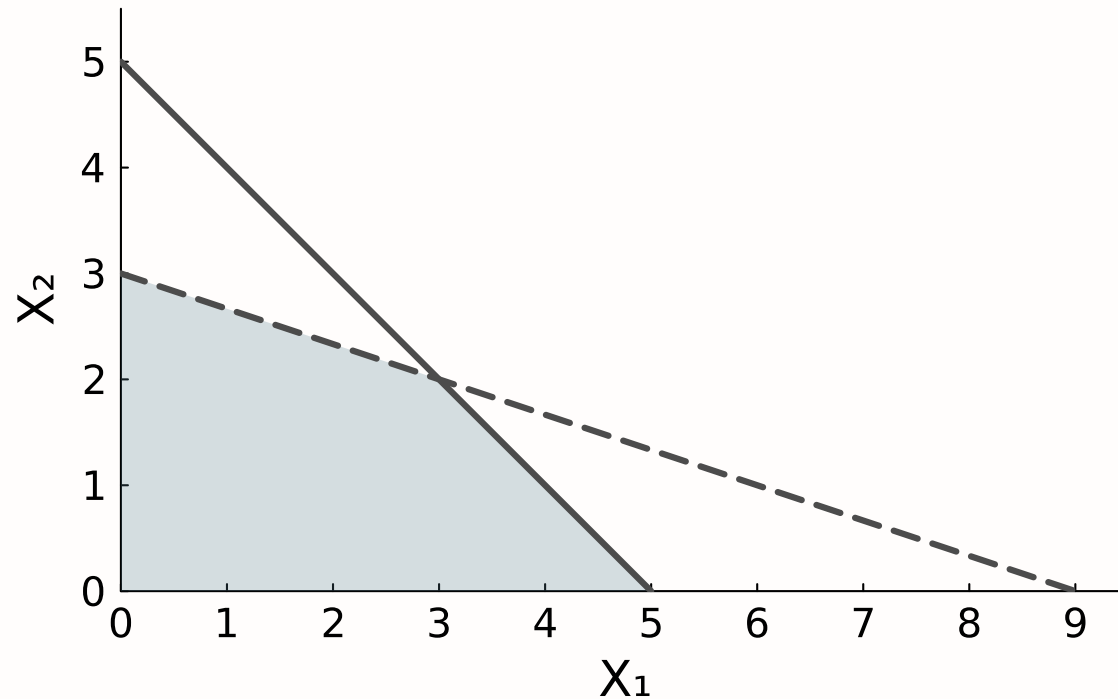
Auftrag 1 wiegt 1 t, Auftrag 2 wiegt 3 t, höchstens 9 t:

$$X_1 + 3X_2 \leq 9$$

Grenzgerade $X_2 = 3 - \frac{1}{3}X_1$:

- $X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 3$
- $X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 9$

Der zulässige Bereich

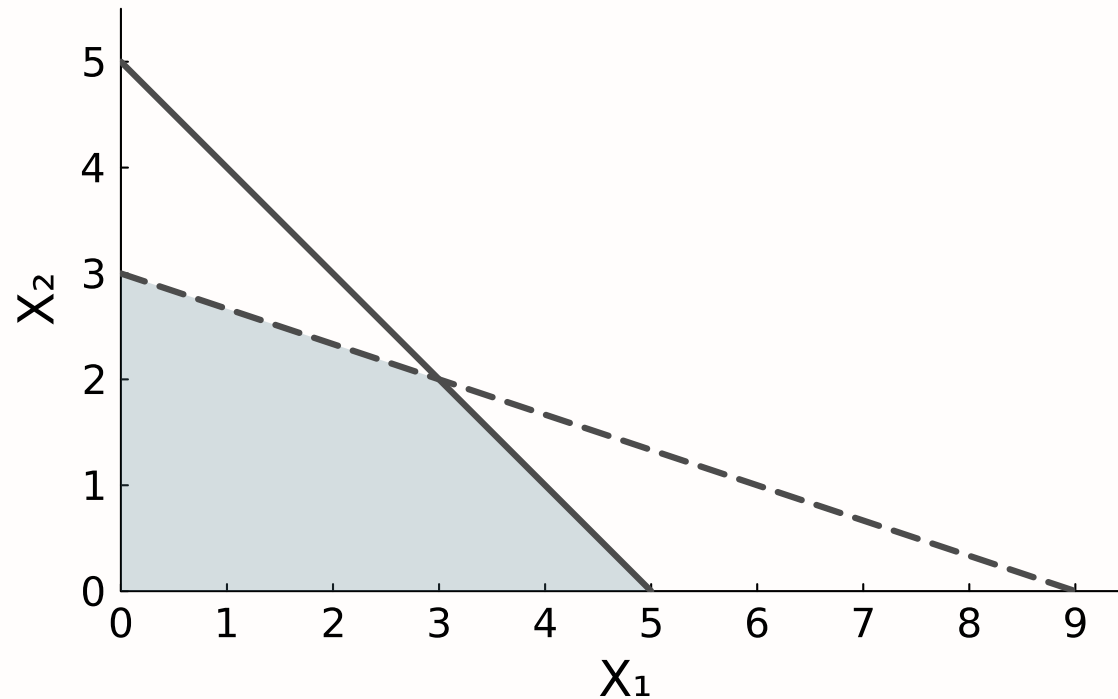


Beide Restriktionen **gleichzeitig** erfüllt (und $X_1, X_2 \geq 0$):

$$X_1 + X_2 \leq 5$$

$$X_1 + 3X_2 \leq 9$$

Der zulässige Bereich



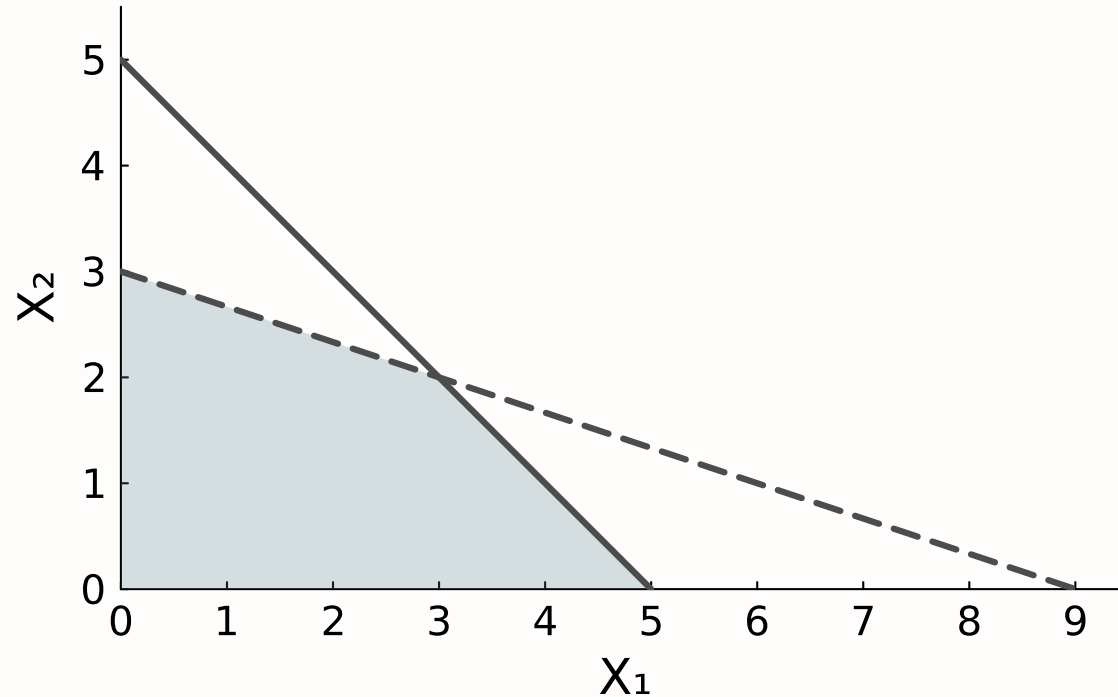
Beide Restriktionen **gleichzeitig** erfüllt (und $X_1, X_2 \geq 0$):

$$X_1 + X_2 \leq 5$$

$$X_1 + 3X_2 \leq 9$$

Die Schnittmenge bildet den **konvexen Lösungsraum**.

Der zulässige Bereich



Beide Restriktionen **gleichzeitig** erfüllt (und $X_1, X_2 \geq 0$):

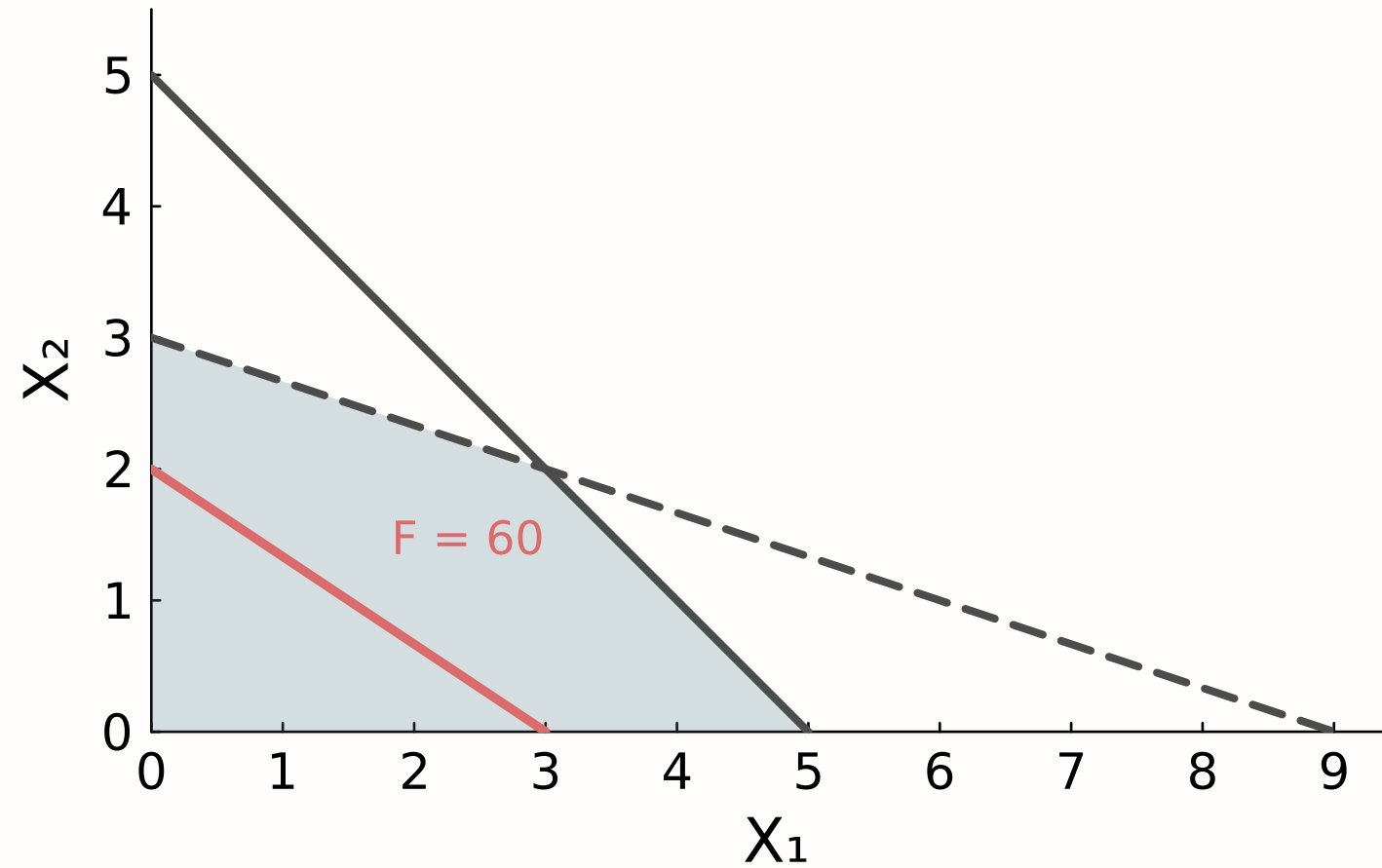
$$X_1 + X_2 \leq 5$$

$$X_1 + 3X_2 \leq 9$$

Die Schnittmenge bildet den **konvexen Lösungsraum**.

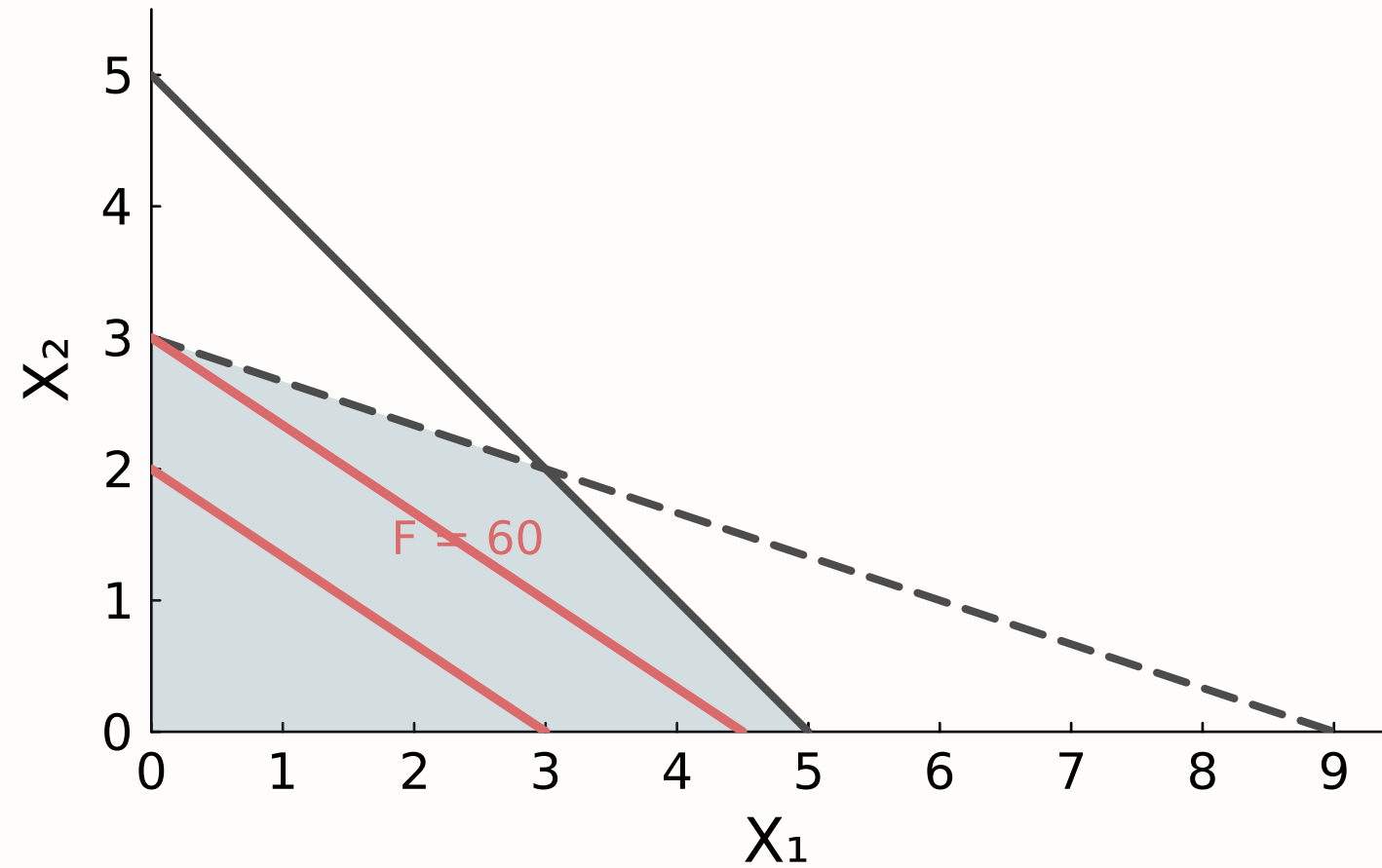
Frage: Wo in dieser Fläche liegt der beste Punkt?

Optimum grafisch bestimmen



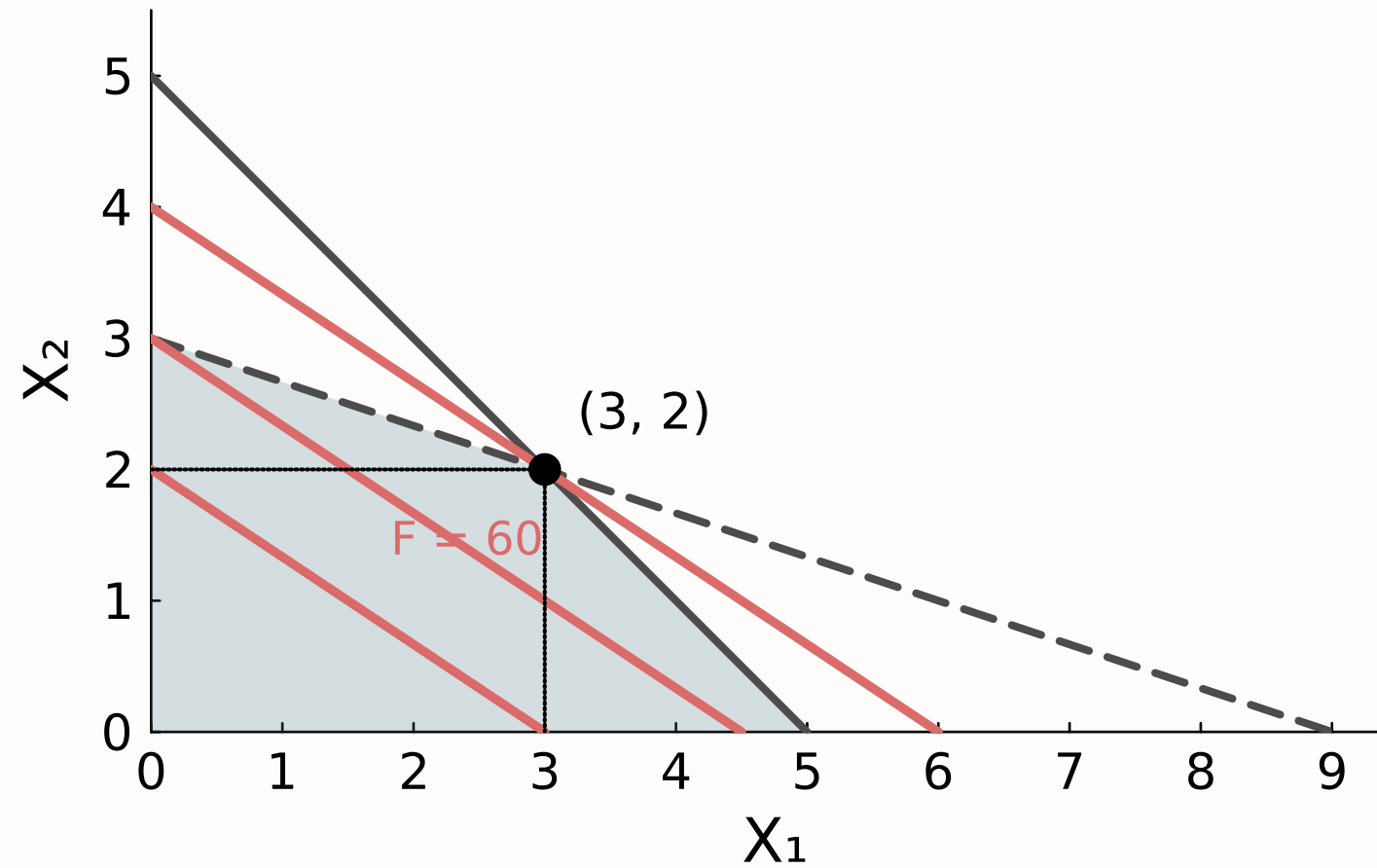
Gerade **parallel** schieben, solange sie den Bereich berührt.

Optimum grafisch bestimmen



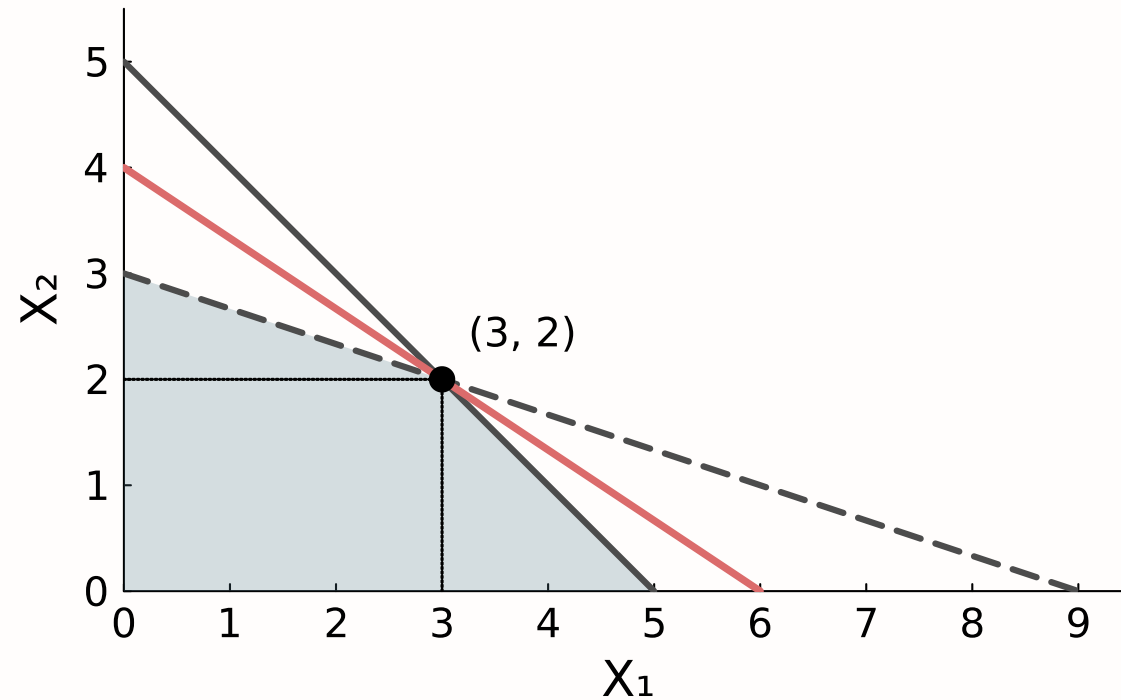
$F = 60 \rightarrow 90$: die Gerade wandert nach außen.

Optimum grafisch bestimmen



$F = 120$: nur der **Eckpunkt** (3, 2) bleibt.

Die optimale Lösung

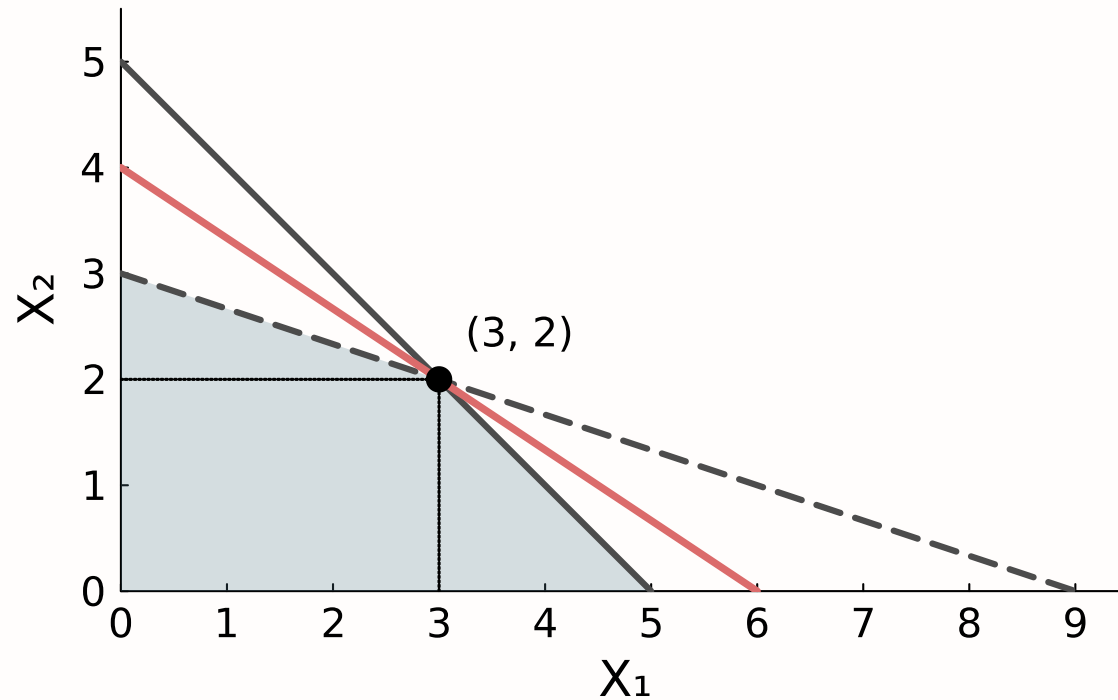


$$X_1^* = 3$$

$$X_2^* = 2$$

$$\begin{aligned} F^* &= 20 \cdot 3 + 30 \cdot 2 \\ &= 120 \end{aligned}$$

Die optimale Lösung



$$X_1^* = 3$$

$$X_2^* = 2$$

$$\begin{aligned} F^* &= 20 \cdot 3 + 30 \cdot 2 \\ &= 120 \end{aligned}$$



Ergebnis

Der maximale Erlös beträgt **120 EUR**.

Überprüfung der Lösung

Optimalwerte $X_1^* = 3, X_2^* = 2$:

Paletten: $3 + 2 = 5 \leq 5 \checkmark$

Gewicht: $3 + 3 \cdot 2 = 9 \leq 9 \checkmark$

Überprüfung der Lösung

Optimalwerte $X_1^* = 3, X_2^* = 2$:

Paletten: $3 + 2 = 5 \leq 5 \checkmark$

Gewicht: $3 + 3 \cdot 2 = 9 \leq 9 \checkmark$

Beide Restriktionen sind **mit Gleichheit** erfüllt. Das Optimum liegt im Schnittpunkt der beiden Grenzgeraden.

Optimum an einer Ecke

! Eckpunktsatz (anschaulich)

Besitzt ein lineares Optimierungsproblem eine optimale Lösung, so wird sie stets in **mindestens einem Eckpunkt** des konvexen Lösungsraums angenommen.

- Die Zielgerade wird verschoben, bis sie den Bereich zuletzt in einer **Ecke** (oder entlang einer **Kante**) berührt.
- Klassische Verfahren suchen daher **systematisch Eckpunkte** ab
⇒ Grundidee des **Simplex-Algorithmus** (Vorlesung 02).

Kurz gefragt

Frage: Und bei einer Minimierung?

Kurz gefragt

Frage: Und bei einer Minimierung?

Dieselbe Idee: die Zielgerade wandert in die **andere** Richtung, bis sie den Bereich zuletzt berührt: wieder ein **Eckpunkt**.

Exkurs: Ganzzahligkeit

Sinnvoll sind nur **ganzzahlige** Palettenmengen. Eigentlich müsste zusätzlich $X_1, X_2 \in \mathbb{Z}$ gefordert werden.

Das Optimum ist der **Schnittpunkt der beiden bindenden Nebenbedingungen**:

$$\begin{array}{rcl} X_1 + X_2 & = & 5 \\ X_1 + 3X_2 & = & 9 \end{array} \} \Rightarrow 2X_2 = 4 \Rightarrow X_2 = 2, X_1 = 3$$

Exkurs: Ganzzahligkeit

Sinnvoll sind nur **ganzzahlige** Palettenmengen. Eigentlich müsste zusätzlich $X_1, X_2 \in \mathbb{Z}$ gefordert werden.

Das Optimum ist der **Schnittpunkt der beiden bindenden Nebenbedingungen**:

$$\begin{array}{rcl} X_1 + X_2 & = & 5 \\ X_1 + 3X_2 & = & 9 \end{array} \} \Rightarrow 2X_2 = 4 \Rightarrow X_2 = 2, X_1 = 3$$

Dass dieser Schnittpunkt **zufällig ganzzahlig** ist, ist ein Glücksfall. Im Allgemeinen ist Ganzzahligkeit *nicht* garantiert ($\rightarrow$ [Vorlesung 08](#)).

Formalisierung als LOP

maximiere $F(X_1, X_2) = 20 X_1 + 30 X_2$

u.d.N. $X_1 + X_2 \leq 5$

$X_1 + 3 X_2 \leq 9$

$X_1, X_2 \geq 0$

Formalisierung als LOP

maximiere $F(X_1, X_2) = 20 X_1 + 30 X_2$

u.d.N. $X_1 + X_2 \leq 5$

$X_1 + 3 X_2 \leq 9$

$X_1, X_2 \geq 0$

Freie Variablen

Darf eine Variable auch negativ sein, ersetzt man sie durch $X_j = X_j^+ - X_j^-$ mit $X_j^+, X_j^- \geq 0$.

Zum Gleichungssystem

Frage: Wie wird aus einer Ungleichung eine Gleichung?

Zum Gleichungssystem

Frage: Wie wird aus einer Ungleichung eine Gleichung?

Wir ergänzen Schlupfvariablen $Y_1, Y_2 \geq 0$:

Zum Gleichungssystem

Frage: Wie wird aus einer Ungleichung eine Gleichung?

Wir ergänzen Schlupfvariablen $Y_1, Y_2 \geq 0$:

- $X_1 + X_2 \leq 5 \Rightarrow X_1 + X_2 + Y_1 = 5$

Zum Gleichungssystem

Frage: Wie wird aus einer Ungleichung eine Gleichung?

Wir ergänzen Schlupfvariablen $Y_1, Y_2 \geq 0$:

- $X_1 + X_2 \leq 5 \Rightarrow X_1 + X_2 + Y_1 = 5$
- $X_1 + 3X_2 \leq 9 \Rightarrow X_1 + 3X_2 + Y_2 = 9$

Zum Gleichungssystem

Frage: Wie wird aus einer Ungleichung eine Gleichung?

Wir ergänzen Schlupfvariablen $Y_1, Y_2 \geq 0$:

- $X_1 + X_2 \leq 5 \Rightarrow X_1 + X_2 + Y_1 = 5$
- $X_1 + 3X_2 \leq 9 \Rightarrow X_1 + 3X_2 + Y_2 = 9$
- Zielfunktion: $-20 X_1 - 30 X_2 + F = 0$

Zum Gleichungssystem

Frage: Wie wird aus einer Ungleichung eine Gleichung?

Wir ergänzen **Schlupfvariablen** $Y_1, Y_2 \geq 0$:

- $X_1 + X_2 \leq 5 \Rightarrow X_1 + X_2 + Y_1 = 5$
- $X_1 + 3X_2 \leq 9 \Rightarrow X_1 + 3X_2 + Y_2 = 9$
- Zielfunktion: $-20 X_1 - 30 X_2 + F = 0$

Eine Schlupfvariable erfasst den *nicht genutzten Rest* einer Restriktion.

Zum Gleichungssystem

Frage: Wie wird aus einer Ungleichung eine Gleichung?

Wir ergänzen **Schlupfvariablen** $Y_1, Y_2 \geq 0$:

- $X_1 + X_2 \leq 5 \Rightarrow X_1 + X_2 + Y_1 = 5$
- $X_1 + 3X_2 \leq 9 \Rightarrow X_1 + 3X_2 + Y_2 = 9$
- Zielfunktion: $-20 X_1 - 30 X_2 + F = 0$

Eine Schlupfvariable erfasst den *nicht genutzten Rest* einer Restriktion.

 Und bei $\geq$?

Dann wird Y **abgezogen** (Überschuss): $X_1 + X_2 \geq 2 \Rightarrow X_1 + X_2 - Y_3 = 2$.

LOP und Gleichungssystem

Lineares Optimierungsproblem

$$\max 20X_1 + 30X_2$$

$$X_1 + X_2 \leq 5$$

$$X_1 + 3X_2 \leq 9$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

LOP und Gleichungssystem

Lineares Optimierungsproblem Gleichungssystem

$$\max 20X_1 + 30X_2$$

$$X_1 + X_2 \leq 5$$

$$X_1 + 3X_2 \leq 9$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

$$X_1 + X_2 + Y_1 = 5$$

$$X_1 + 3X_2 + Y_2 = 9$$

$$-20X_1 - 30X_2 + F = 0$$

LOP und Gleichungssystem

Lineares Optimierungsproblem Gleichungssystem

$$\max 20X_1 + 30X_2$$

$$X_1 + X_2 \leq 5$$

$$X_1 + 3X_2 \leq 9$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

$$X_1 + X_2 + Y_1 = 5$$

$$X_1 + 3X_2 + Y_2 = 9$$

$$-20X_1 - 30X_2 + F = 0$$

Das Gleichungssystem ist die Grundlage des **Simplex-Algorithmus** (Vorlesung 02).

Lösung mit Julia

Modellierung mit JuMP

Dasselbe Problem, gelöst mit Julia, JuMP und HiGHS:

```
1 using JuMP, HiGHS
2
3 modell = Model(HiGHS.Optimizer)
4 set_silent(modell)
5
6 @variable(modell, X1 >= 0)    # Abnahmemenge Auftrag 1
7 @variable(modell, X2 >= 0)    # Abnahmemenge Auftrag 2
8
9 @objective(modell, Max, 20X1 + 30X2)    # Umsatzerlöse in EUR
10
11 @constraint(modell, Paletten, X1 + X2 <= 5)    # max. 5 Paletten
12 @constraint(modell, Gewicht, X1 + 3X2 <= 9)    # max. 9 Tonnen
13
14 optimize!(modell)
15 println("F* = ", objective_value(modell),
16         " mit X1 = ", value(X1), ", X2 = ", value(X2))
```

Modellierung mit JuMP

Dasselbe Problem, gelöst mit Julia, JuMP und HiGHS:

```
1 using JuMP, HiGHS
2
3 modell = Model(HiGHS.Optimizer)
4 set_silent(modell)
5
6 @variable(modell, X1 >= 0)    # Abnahmemenge Auftrag 1
7 @variable(modell, X2 >= 0)    # Abnahmemenge Auftrag 2
8
9 @objective(modell, Max, 20X1 + 30X2)    # Umsatzerlöse in EUR
10
11 @constraint(modell, Paletten, X1 + X2 <= 5)    # max. 5 Paletten
12 @constraint(modell, Gewicht, X1 + 3X2 <= 9)    # max. 9 Tonnen
13
14 optimize!(modell)
15 println("F* = ", objective_value(modell),
16         " mit X1 = ", value(X1), ", X2 = ", value(X2))
```

F* = 120.0 mit X1 = 3.0, X2 = 2.0

Ergebnis

Die Zelle liefert die bereits grafisch bestimmte Lösung:

! Optimale Lösung

$$F^* = 120, \quad X_1^* = 3, \quad X_2^* = 2$$

Ergebnis

Die Zelle liefert die bereits grafisch bestimmte Lösung:

! Optimale Lösung

$$F^* = 120, \quad X_1^* = 3, \quad X_2^* = 2$$

So können Sie Ihre Handrechnungen jederzeit überprüfen, mehr dazu im Abschnitt [Julia](#).

Zusammenfassung

Das Wichtigste auf einen Blick

Das Wichtigste auf einen Blick

- Ein **LOP** hat eine lineare Zielfunktion und lineare Nebenbedingungen.

Das Wichtigste auf einen Blick

- Ein **LOP** hat eine lineare Zielfunktion und lineare Nebenbedingungen.
- Bei zwei Variablen lösen wir **grafisch**; das Optimum liegt an einer **Ecke**.

Das Wichtigste auf einen Blick

- Ein **LOP** hat eine lineare Zielfunktion und lineare Nebenbedingungen.
- Bei zwei Variablen lösen wir **grafisch**; das Optimum liegt an einer **Ecke**.
- **Schlupfvariablen** ergeben das Gleichungssystem: Basis für den Simplex.

Das Wichtigste auf einen Blick

- Ein **LOP** hat eine lineare Zielfunktion und lineare Nebenbedingungen.
- Bei zwei Variablen lösen wir **grafisch**; das Optimum liegt an einer **Ecke**.
- **Schlupfvariablen** ergeben das Gleichungssystem: Basis für den Simplex.
- Mit **Julia/JuMP** lösen wir dasselbe Modell rechnerisch.

Literatur

Literaturverzeichnis

- Desrosiers, Jacques, Arielle Lasry, Daniel McInnis, Marius M. Solomon, und François Soumis. 2000. „Air Transat Uses ALTITUDE to Manage Its Aircraft Routing, Crew Pairing, and Work Assignment“. *Interfaces* 30 (2): 41–53. <https://doi.org/10.1287/inte.30.2.41.11673>.
- Domschke, Wolfgang, Andreas Drexl, Robert Klein, und Armin Scholl. 2015. *Einführung in Operations Research*. 9. Aufl. Springer Gabler. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-48216-2>.
- Haase, Knut, Habib Zain Al Abideen, Salim Al-Bosta, u. a. 2016. „Improving Pilgrim Safety During the Hajj: An Analytical and Operational Research Approach“. *Interfaces* 46 (1): 74–90. <https://doi.org/10.1287/inte.2015.0833>.
- Haase, Knut, Jörg Latteier, und Andreas Schirmer. 1999. „Course Planning at Lufthansa Technical Training: Constructing More Profitable Schedules“. *Interfaces* 29 (5): 95–109. <https://doi.org/10.1287/inte.29.5.95>.

Literaturverzeichnis (2/3)

Jütte, Silke, Marc Albers, Ulrich W. Thonemann, und Knut Haase. 2011. „Optimizing Railway Crew Scheduling at DB Schenker“. *Interfaces* 41 (2): 109–22.

<https://doi.org/10.1287/inte.1100.0549>.

Mickein, Markus, Matthes Koch, und Knut Haase. 2022. „A Decision Support System for Brewery Production Planning at Feldschlösschen“. *INFORMS Journal on Applied Analytics* 52 (2): 158–72. <https://doi.org/10.1287/inte.2021.1101>.

Thomas, Bex George, Srinivas Bollapragada, Kunter Akbay, u. a. 2013. „Automated Bed Assignments in a Complex and Dynamic Hospital Environment“. *Interfaces* 43 (5): 435–48. <https://doi.org/10.1287/inte.2013.0701>.

Trick, Michael A., Hakan Yildiz, und Tallys Yunes. 2012. „Scheduling Major League Baseball Umpires and the Traveling Umpire Problem“. *Interfaces* 42 (3): 232–44. <https://doi.org/10.1287/inte.1100.0514>.

Literaturverzeichnis (3/3)

- Vlček, Tobias, Knut Haase, Malte Fliedner, und Tobias Cors. 2024. „Police Service District Planning“. *OR Spectrum* 46 (4): 1029–61. <https://doi.org/10.1007/s00291-024-00745-3>.
- Vlček, Tobias, Knut Haase, Matthes Koch, Lena Dolz, Anneke Weygandt, und Jan Pape. 2023. „Controlling Passenger Flows into Metro Systems to Mitigate Overcrowding During Large-Scale Events“. *Working Paper*.
- Westphal, Stephan. 2014. „Scheduling the German Basketball League“. *Interfaces* 44 (5): 498–508. <https://doi.org/10.1287/inte.2014.0764>.