

Vorlesung 01: Graphisches Lösen

Grundlagen Operations Research

Organisatorisches

Herzlich willkommen!

Grundlagen Operations Research

- Prof. Dr. Knut Haase, Simon Rienks, Fiona Sauerbier und Dr. Tobias Vlček
- Institut für Logistik, Verkehr und Produktion
- University of Hamburg Business School
- Ein forschungsorientiertes Modul mit starkem Praxisbezug

Aufbau der Veranstaltung

1. **Vorlesung (2 SWS)**: die zwölf Themen des Kurses
2. **Übungen (1 SWS)**: Übungsvideos + Julia-Aufgaben, alle zwei Wochen
3. **Besprechungen (1 SWS)**: Fragen & Aufgabenvorstellung (bis 2 Bonuspunkte)
4. **Klausurtrainer (freiwillig)**: Übungsaufgaben in OpenOlat (bis 6 Bonuspunkte)

Details finden Sie im [Syllabus](#) und in den [häufigen Fragen](#).

Warum sich der Aufwand lohnt

Die Klausur: **90 Minuten, 90 Punkte**, dazu bis zu **8 Bonuspunkte**. Auswertung eines früheren Wintersemesters:

- Klausurtrainer ≥ 4 Punkte, **keine** Besprechungs-Bonuspunkte: im Schnitt **+12 Punkte** in der Klausur.
- Klausurtrainer ≥ 4 Punkte und ≥ 2 Besprechungs-Bonuspunkte: im Schnitt **+18 Punkte**.

Bonuspunkte zählen erst ab einer bestandenen Klausur (mind. 4,0).

Inhalte der Veranstaltung

1. Lineare Optimierung
2. Graphentheoretische Grundlagen
3. Das klassische Transportproblem
4. Ganzzahlige Optimierung: Branch & Bound
5. Netzplantechnik
6. Optimierung bei mehrfacher Zielsetzung
7. Modellierung

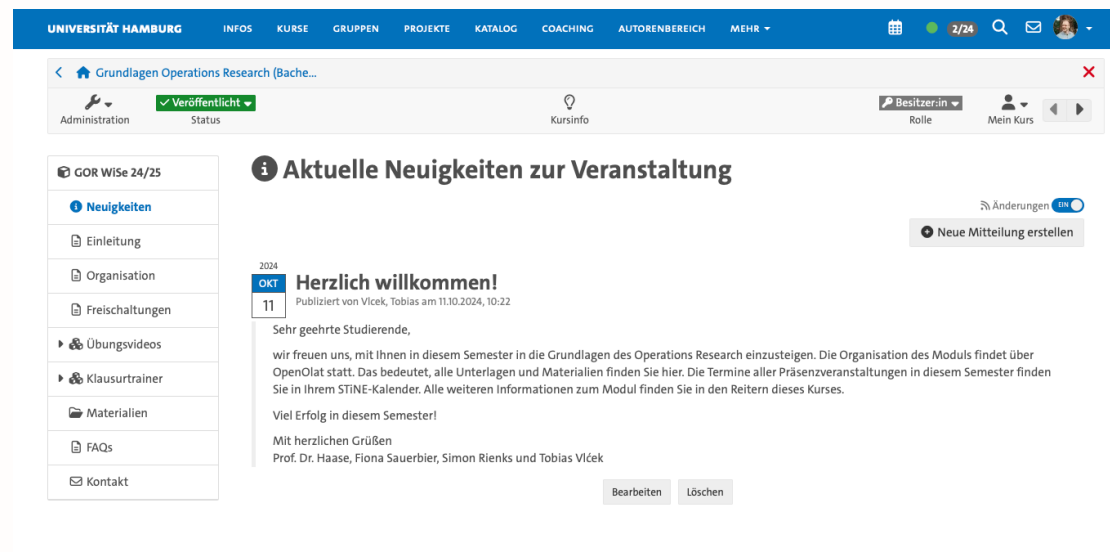
Software: Julia statt GAMS

! Neu: Wir modellieren mit Julia

In dieser Veranstaltung lösen wir Optimierungsprobleme mit **Julia**, dem Paket **JuMP** und dem Solver **HiGHS**. Julia ersetzt GAMS vollständig und ist **klausurrelevant**.

- Einstieg ohne Vorkenntnisse: siehe [Julia · Installation & Setup](#)
- Organisation weiterhin über **OpenOlat** und den **Klausurtrainer**

OpenOlat



Noch nie mit OpenOlat gearbeitet?

Wir laden Sie erst in den Kurs ein, nachdem Sie sich einmal angemeldet haben, bitte zeitnah:

openolat.uni-hamburg.de

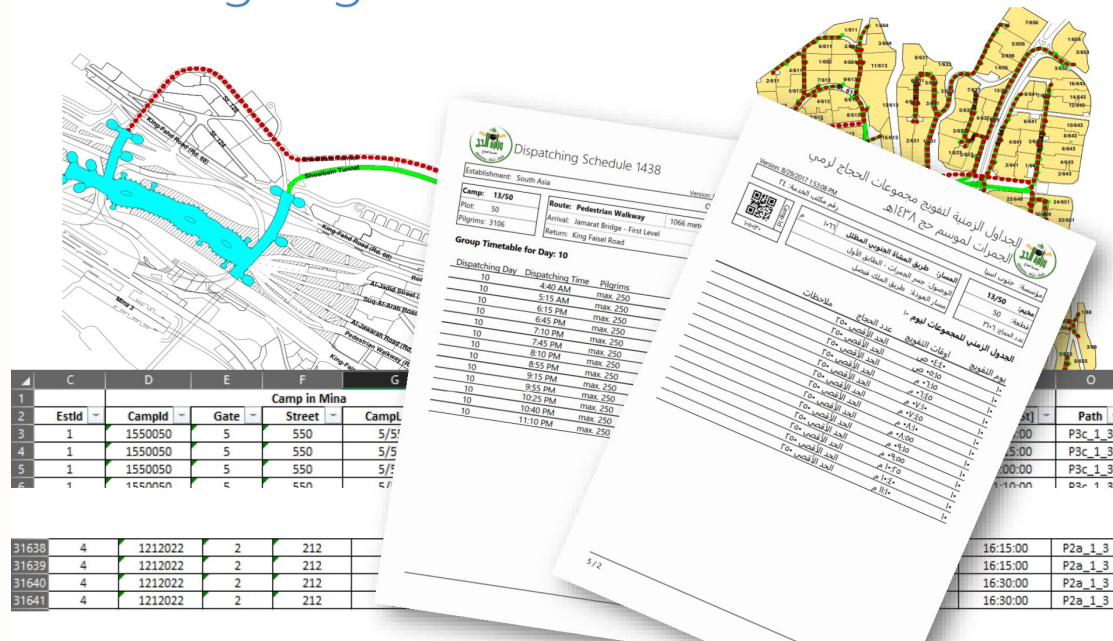
Praxisrelevanz

Crowd Management in Mekka

K. Haase u. a. [1]

Planung der Pilgerströme

Planungsergebnisse

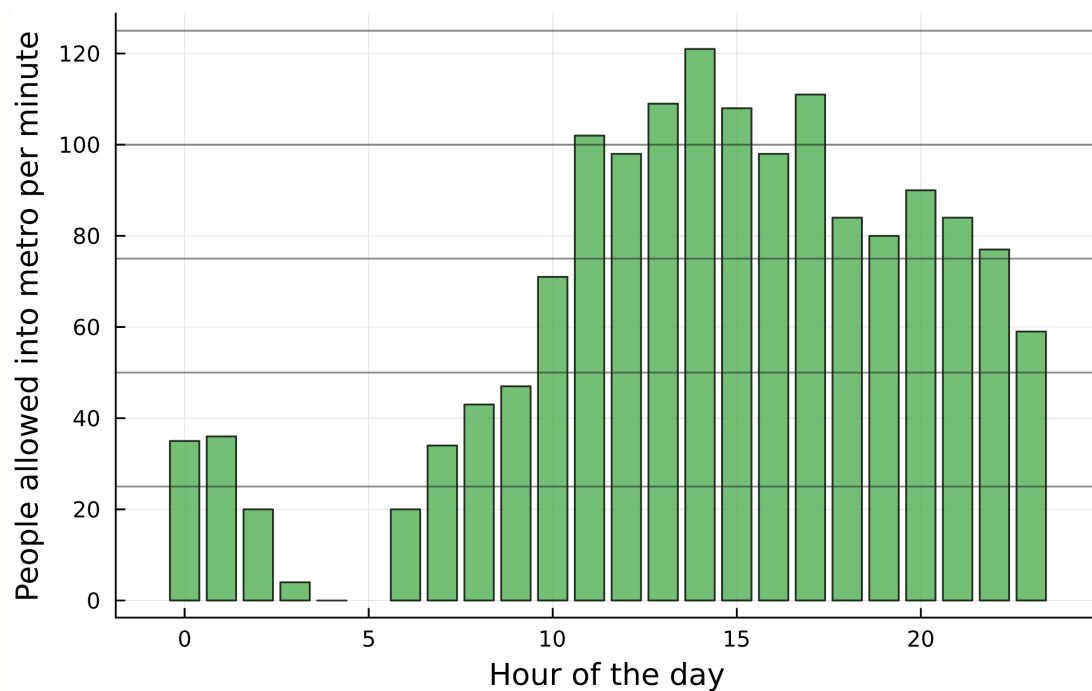


- Zeitpläne und Routen für die Pilgerströme zur **Haddsch**
- Modell: *Path Assignment and Timetabling*

Metro-Zufluss in Doha

T. Vlček, K. Haase, M. Koch, L. Dolz, A. Weygandt, und J. Pape [2]

Gesteuerter Metro-Zufluss

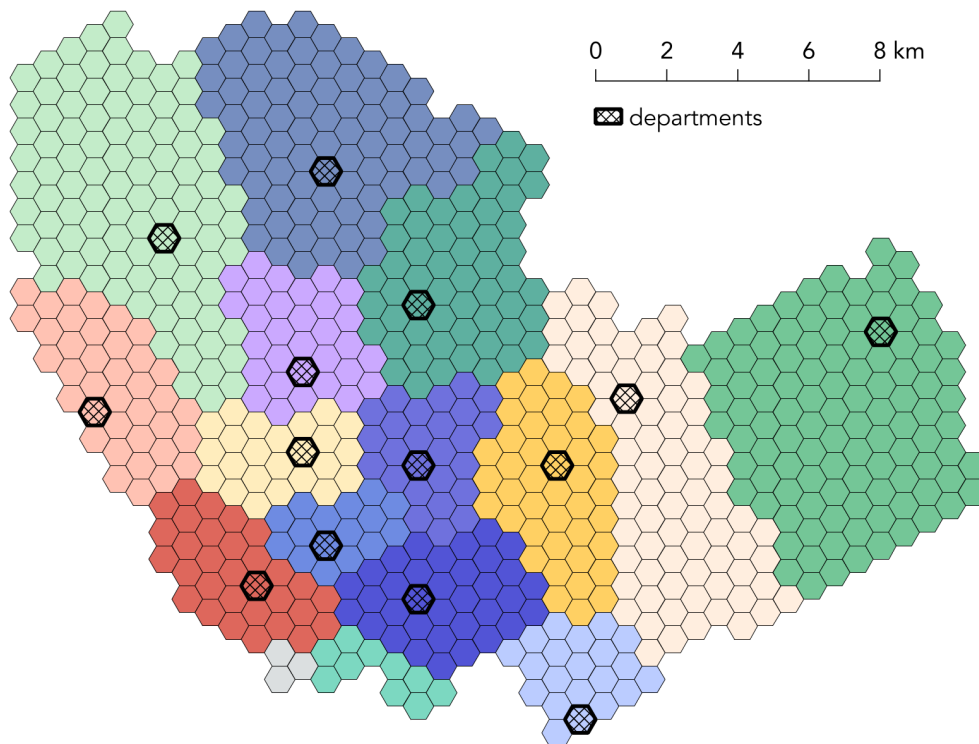


- Einlasssteuerung nach Großveranstaltungen
- Ergebnis: zulässige **Einlassraten** je Stunde

Polizei-Distriktplanung

T. Vlček, K. Haase, M. Fliedner, und T. Cors [3]

Zuschnitt von Polizeibezirken

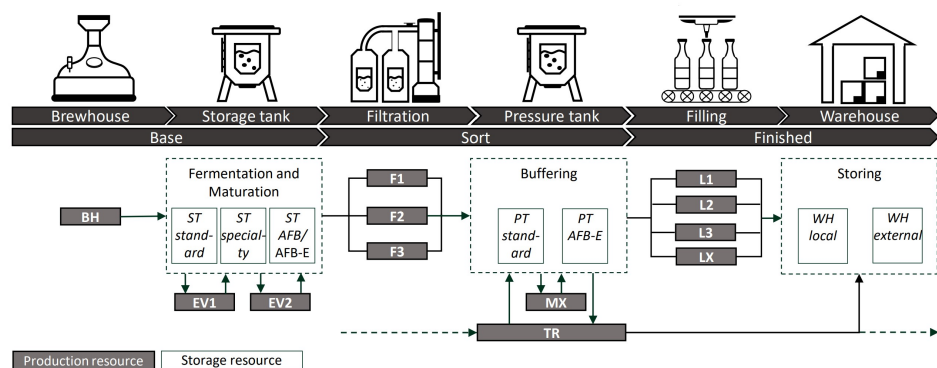


- Optimaler **Zuschnitt** der Bezirke um die Wachen
- Ziele: kurze Wege, **ausgeglichene Auslastung**

Brauerei-Produktionsplanung

M. Mickein, M. Koch, und K. Haase [4]

Von der Forschung in die Lehre



Storage resource types: storage tank (ST), pressure tank (PT), and warehouse (WH)
 Production resource types: brewhouse (BH), filtration line (F), filling line/station (L), evaporation station (EV), mixing station (MX), and transfer station (TR)

Losgrößen- & Ressourcenplanung (Brauerei): M. Mickein, M. Koch, und K. Haase [4]



Lehrgangsplanung: K. Haase, J. Latteier, und A. Schirmer [5]

Anwendungsfelder des OR

- Flugrouten- und Crew-Planung [6]
- Bettenmanagement in Krankenhäusern [7]
- Einsatzplanung von Eisenbahnpersonal [8]
- Schiedsrichter-Zuordnung in der Baseball-Liga [9]
- Spielpläne im Profisport [10]

Internationalisierung Gesellschaften

- **GOR:** Gesellschaft für OR
- **EURO:** European OR Societies
- **INFORMS:** OR & Management Sciences
- **IFORS:** International Federation

Zeitschriften (Auswahl)

- European Journal of OR
- Management Science
- Operations Research
- OR Spectrum

Auszeichnungen

- **2021:** Best Paper Award VHB
- **2021:** EURO Excellence in Practice Award (Finalist, 2. Platz)
- **2015:** INFORMS Franz Edelman Award (Finalist)

Lineare Optimierung

Lineares Optimierungsproblem

Ein LOP besitzt eine lineare **Zielfunktion** und ausschließlich lineare **Nebenbedingungen**.

Allgemeine Form

$$\begin{aligned} \text{maximiere } F &= c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_J X_J \\ \text{u.d.N. } a_{i1} X_1 + \dots + a_{iJ} X_J &\leq b_i \quad \forall i \\ X_j &\geq 0 \quad \forall j \end{aligned}$$

X_j Entscheidungsvariable, c_j Zielkoeffizient, a_{ij}, b_i Parameter.

Eine Tour, zwei Angebote

Beispiel aus der Logistik

Ein Frachtführer bedient die Relation **Hamburg–Kiel**. Für eine Fahrt stehen noch **5 Palettenstellplätze** zur Verfügung; die Zuladung darf **9 Tonnen** nicht überschreiten. Über eine Frachtbörse erhält er **zwei Auftragsangebote**.

Fragestellung

Wie viele Paletten je Angebot maximieren seine **Erlöse** (F)?

Die Daten

Auftrag	Stückerlös	Paletten	Tonnen
1	20	1	1
2	30	1	3
LKW-Kapazität		5	9

Gesucht: die **erlösmaximale** Übernahme an Aufträgen.

Warum grafisch lösen?

Idee

Bei **zwei** Entscheidungsvariablen können wir jede zulässige Lösung als Punkt in der Ebene zeichnen. Die Zielfunktion wird zu einer **Geraden**, die wir so weit wie möglich in Richtung besserer Werte verschieben.

Das gibt uns ein Gefühl dafür, *warum* die optimale Lösung an einer **Ecke** des zulässigen Bereichs liegt, bevor wir später rechnerisch (Simplex) vorgehen.

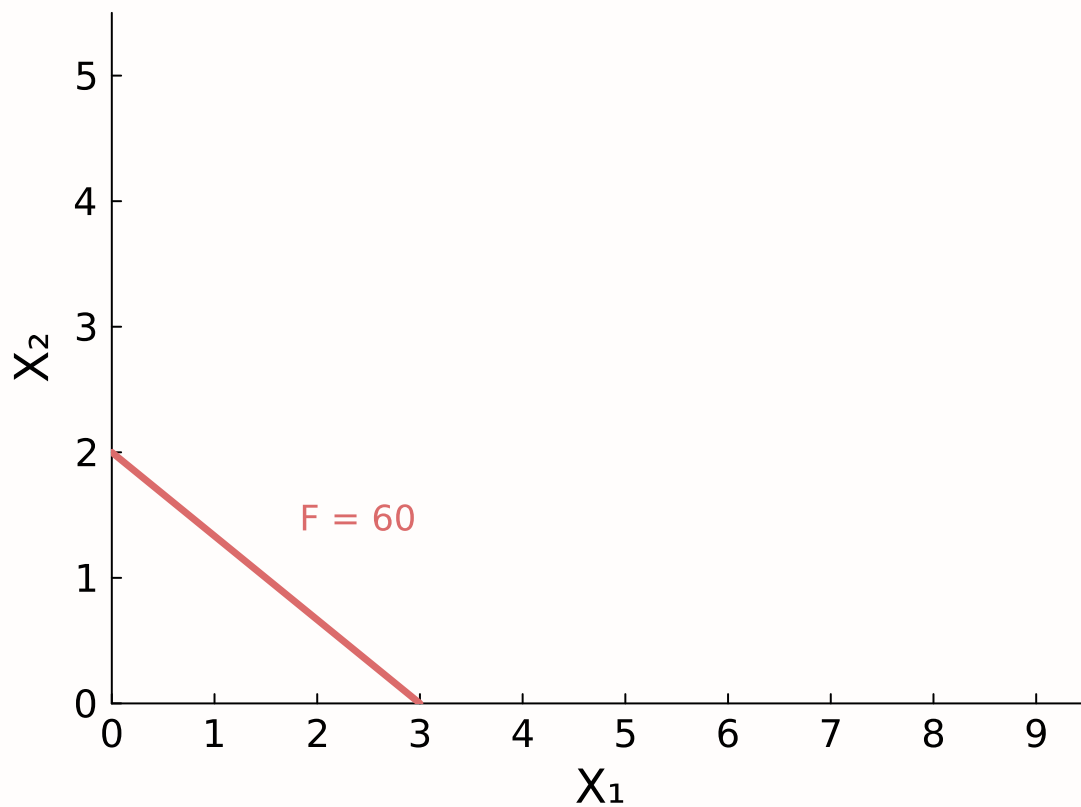
Zielfunktion

Entscheidungsvariablen

- X_1 : Abnahmemenge gemäß Auftrag 1
- X_2 : Abnahmemenge gemäß Auftrag 2
- F : Erlöse in EUR

maximiere $F(X_1, X_2) = 20 X_1 + 30 X_2$

Zielfunktionsgerade für $F = 60$



Wir geben einen Zielwert vor, z. B. $F = 60$:

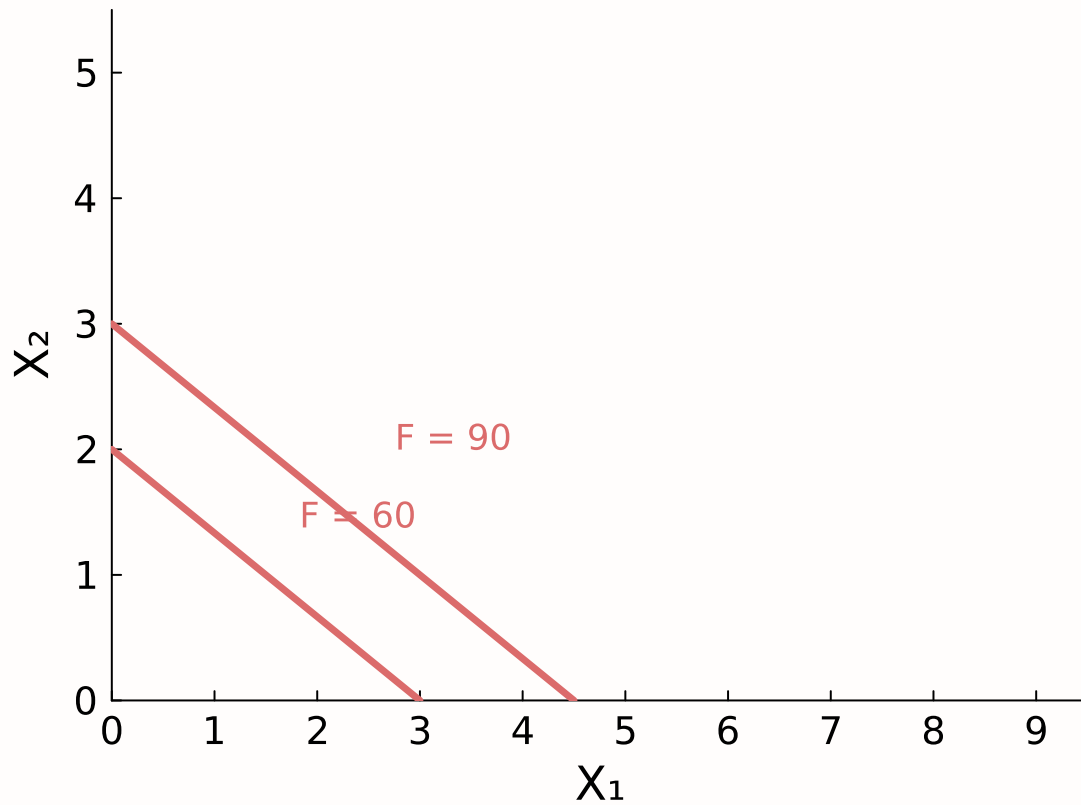
$$60 = 20 X_1 + 30 X_2$$

$$\Rightarrow X_2 = 2 - \frac{2}{3} X_1$$

- $X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 2$
- $X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 3$

Jeder Punkt liefert denselben Erlös.

Zielgerade verschieben



Erhöhen wir den Zielwert auf $F = 90$:

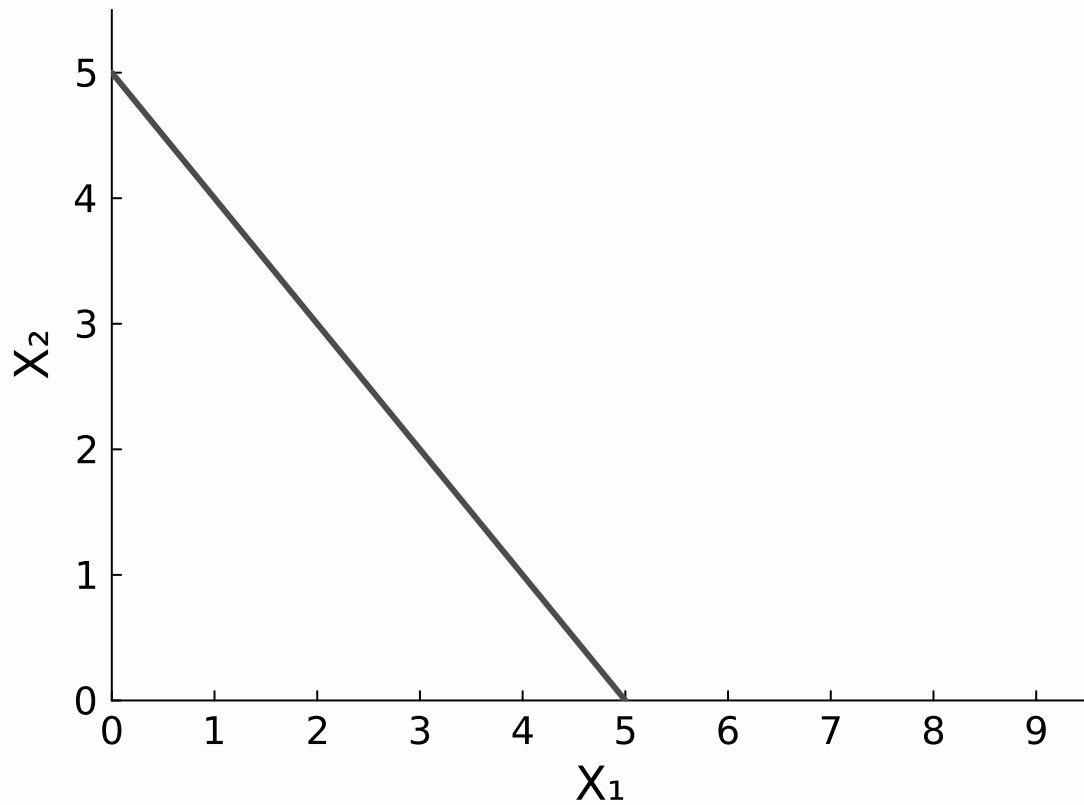
$$90 = 20 X_1 + 30 X_2$$

$$\Rightarrow X_2 = 3 - \frac{2}{3} X_1$$

- $X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 3$
- $X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 4,5$

Die Gerade wandert **parallel nach rechts oben**.

Nebenbedingung: Paletten



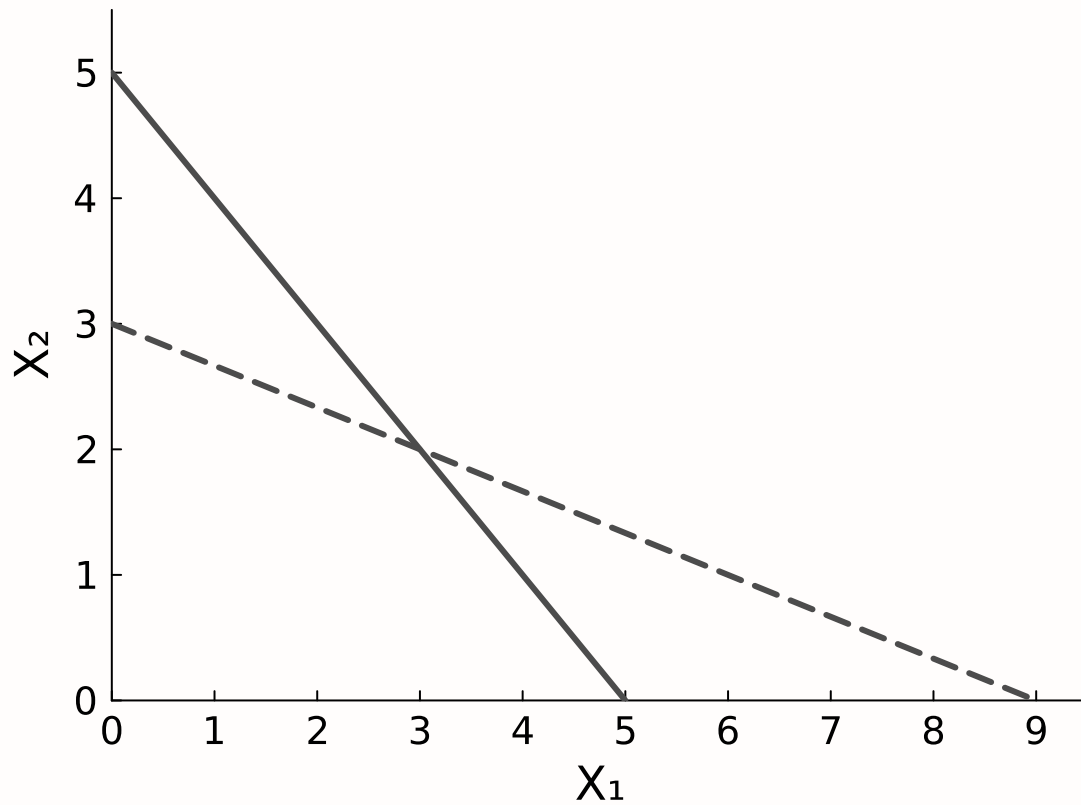
Je Abnahmemenge eine Palette, höchstens 5:

$$X_1 + X_2 \leq 5$$

Grenzgerade $X_2 = 5 - X_1$:

- $X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 5$
- $X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 5$
- zulässig: **auf oder unterhalb**

Nebenbedingung: Ladegewicht



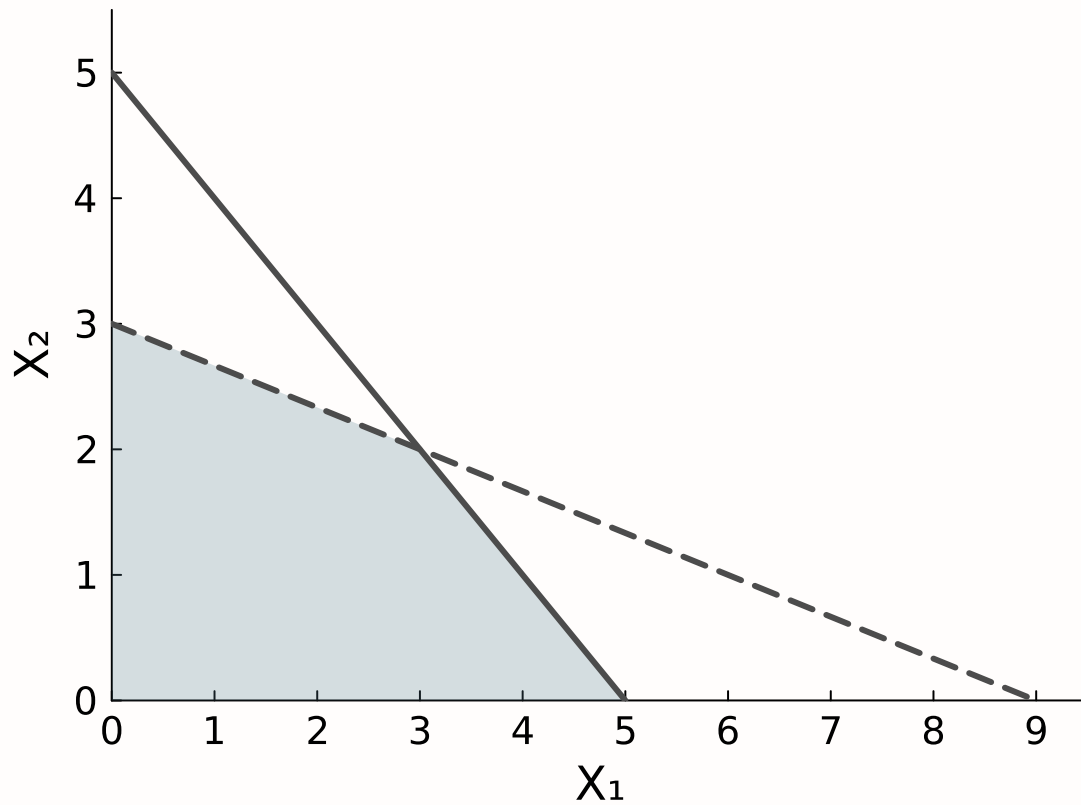
Auftrag 1 wiegt 1 t, Auftrag 2 wiegt 3 t, höchstens 9 t:

$$X_1 + 3X_2 \leq 9$$

Grenzgerade $X_2 = 3 - \frac{1}{3}X_1$:

- $X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 3$
- $X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 9$

Der zulässige Bereich



Beide Restriktionen **gleichzeitig** erfüllt (und $X_1, X_2 \geq 0$):

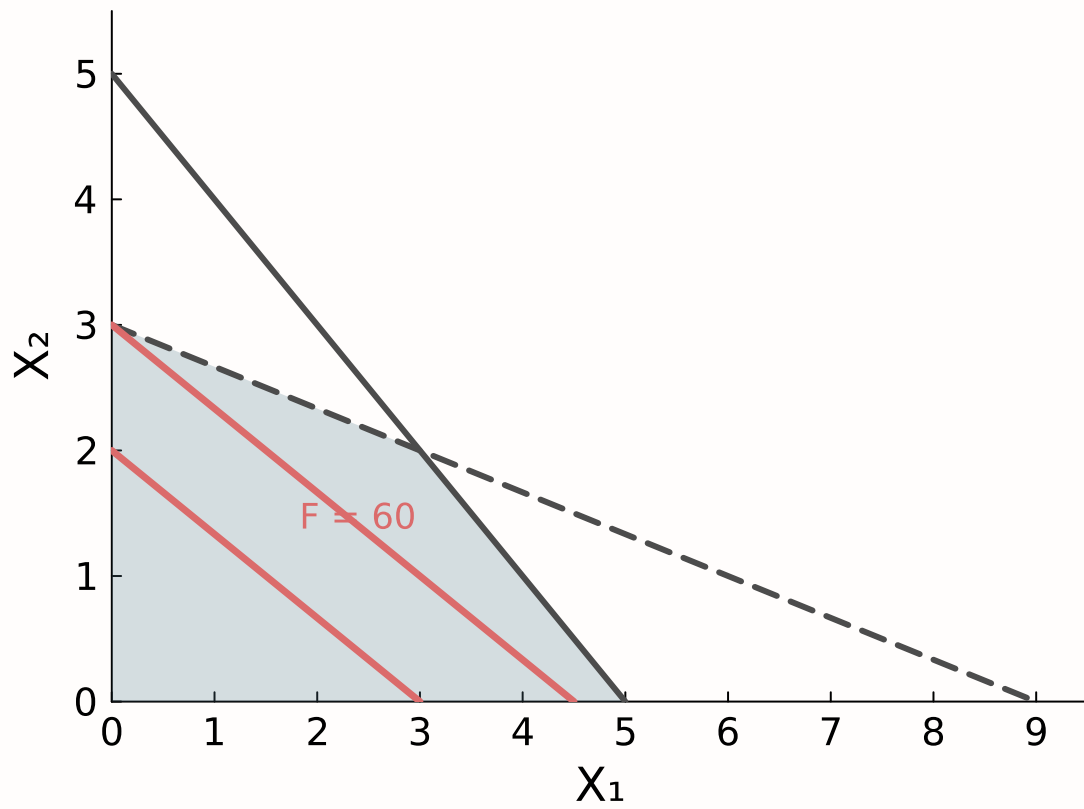
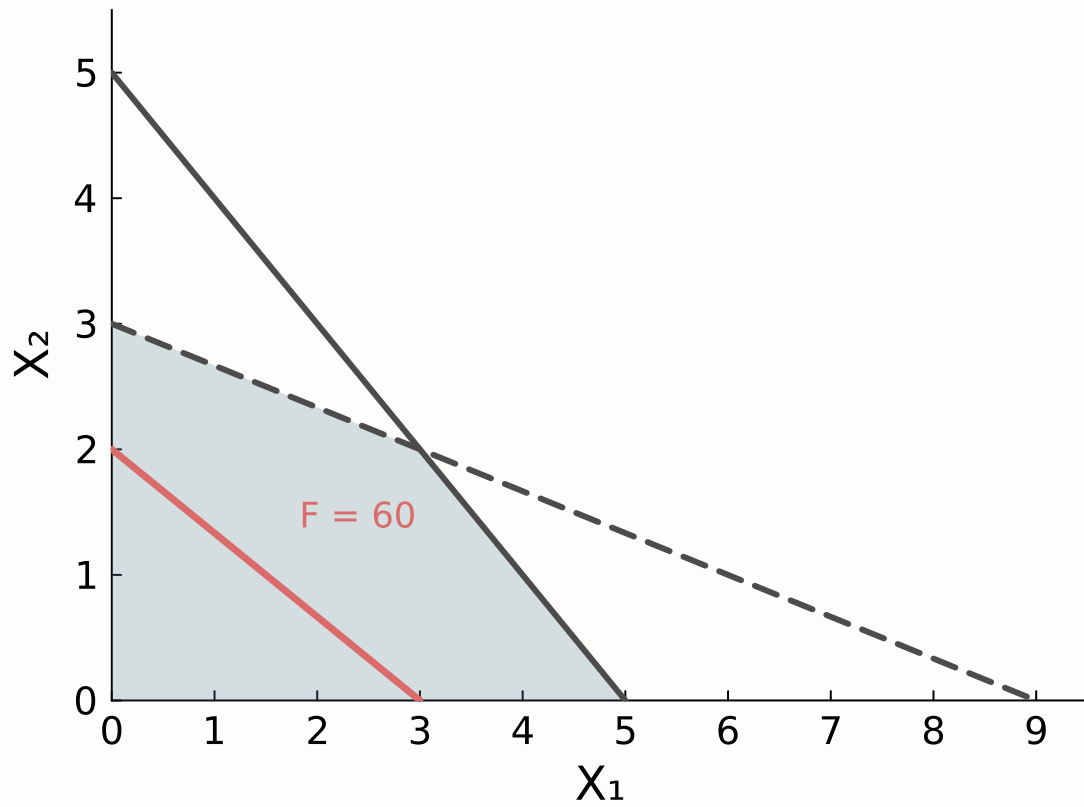
$$X_1 + X_2 \leq 5$$

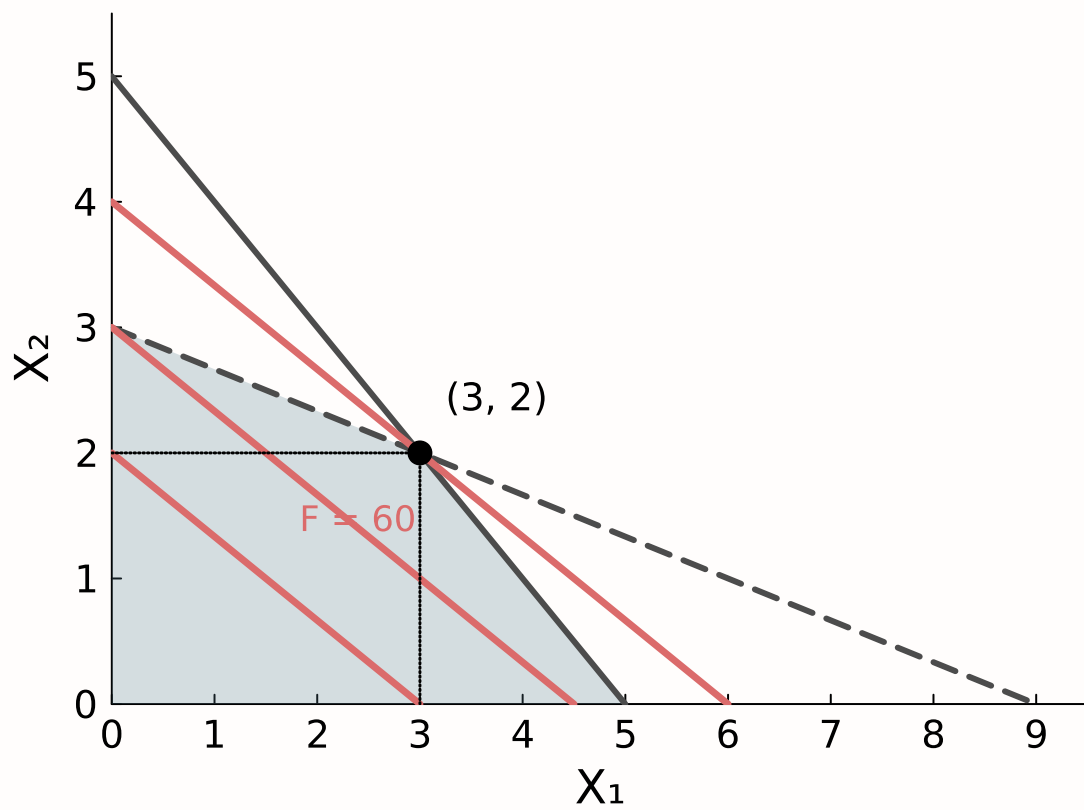
$$X_1 + 3X_2 \leq 9$$

Die Schnittmenge bildet den **konvexen Lösungsraum**.

Frage: **Wo in dieser Fläche liegt der beste Punkt?**

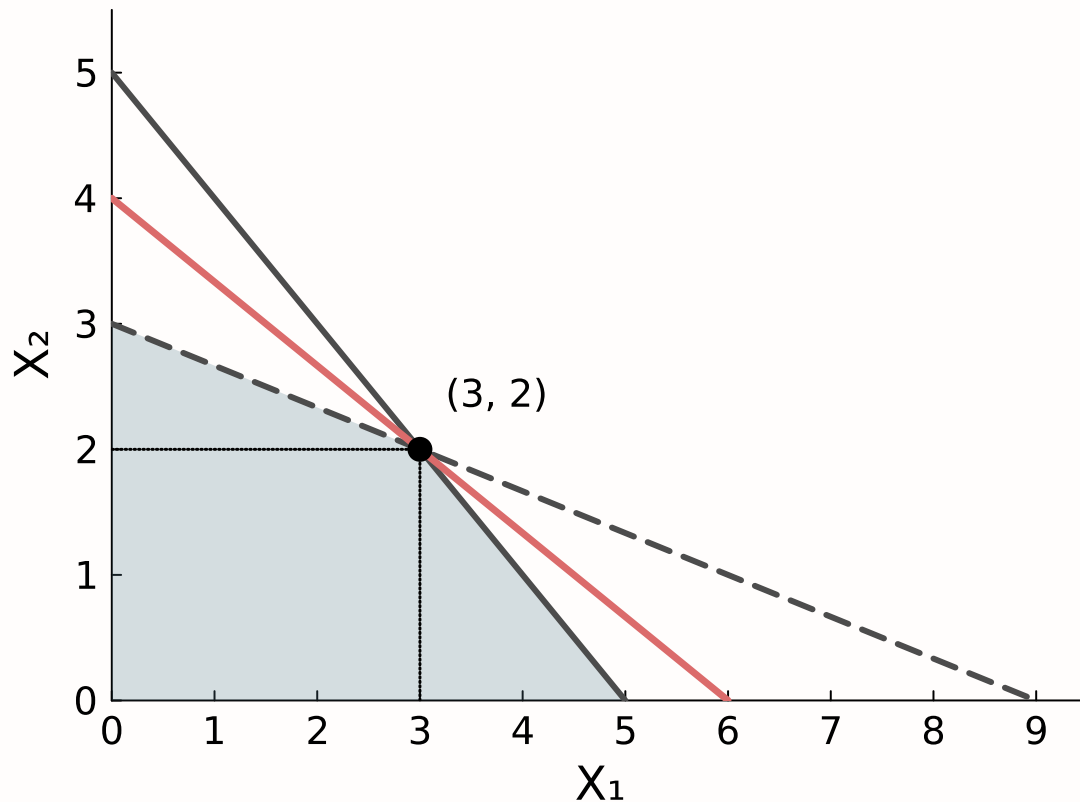
Optimum grafisch bestimmen





- Zielgerade **parallel** verschieben, solange sie den Bereich berührt
- $F = 60 \rightarrow 90$: die Gerade wandert nach außen
- $F = 120$: nur der **Eckpunkt** $(3, 2)$ bleibt

Die optimale Lösung



$$X_1^* = 3$$

$$X_2^* = 2$$

$$\begin{aligned} F^* &= 20 \cdot 3 + 30 \cdot 2 \\ &= 120 \end{aligned}$$

! Ergebnis

Der maximale Erlös beträgt **120 EUR**.

Überprüfung der Lösung

Optimalwerte $X_1^* = 3$, $X_2^* = 2$:

$$\text{Paletten: } 3 + 2 = 5 \leq 5 \checkmark$$

$$\text{Gewicht: } 3 + 3 \cdot 2 = 9 \leq 9 \checkmark$$

Beide Restriktionen sind **mit Gleichheit** erfüllt. Das Optimum liegt im Schnittpunkt der beiden Grenzgeraden.

Optimum an einer Ecke

! Eckpunktsatz (anschaulich)

Besitzt ein lineares Optimierungsproblem eine optimale Lösung, so wird sie stets in **mindestens einem Eckpunkt** des konvexen Lösungsraums angenommen.

- Die Zielgerade wird verschoben, bis sie den Bereich zuletzt in einer **Ecke** (oder entlang einer **Kante**) berührt.
- Klassische Verfahren suchen daher **systematisch Eckpunkte** ab $\Rightarrow$ Grundidee des **Simplex-Algorithmus** (Vorlesung 02).

Kurz gefragt

Frage: **Und bei einer Minimierung?**

Dieselbe Idee: die Zielgerade wandert in die **andere** Richtung, bis sie den Bereich zuletzt berührt: wieder ein **Eckpunkt**.

Exkurs: Ganzzahligkeit

Sinnvoll sind nur **ganzzahlige** Palettenmengen. Eigentlich müsste zusätzlich $X_1, X_2 \in \mathbb{Z}$ gefordert werden.

Das Optimum ist der **Schnittpunkt der beiden bindenden Nebenbedingungen**:

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &= 5 \\ X_1 + 3X_2 &= 9 \end{aligned} \Rightarrow 2X_2 = 4 \Rightarrow X_2 = 2, X_1 = 3$$

Dass dieser Schnittpunkt **zufällig ganzzahlig** ist, ist ein Glücksfall. Im Allgemeinen ist Ganzzahligkeit *nicht* garantiert ($\rightarrow$ [Vorlesung 08](#)).

Formalisierung als LOP

$$\begin{aligned} &\text{maximiere } F(X_1, X_2) = 20X_1 + 30X_2 \\ &\text{u.d.N. } \begin{aligned} X_1 + X_2 &\leq 5 \\ X_1 + 3X_2 &\leq 9 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned} \end{aligned}$$

i Freie Variablen

Darf eine Variable auch negativ sein, ersetzt man sie durch $X_j = X_j^+ - X_j^-$ mit $X_j^+, X_j^- \geq 0$.

Zum Gleichungssystem

Frage: **Wie wird aus einer Ungleichung eine Gleichung?**

Wir ergänzen **Schlupfvariablen** $Y_1, Y_2 \geq 0$:

- $X_1 + X_2 \leq 5 \Rightarrow X_1 + X_2 + Y_1 = 5$
- $X_1 + 3X_2 \leq 9 \Rightarrow X_1 + 3X_2 + Y_2 = 9$

- Zielfunktion: $-20 X_1 - 30 X_2 + F = 0$

Eine Schlupfvariable erfasst den *nicht genutzten Rest* einer Restriktion.

LOP und Gleichungssystem

Lineares Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \max & 20X_1 + 30X_2 \\ & X_1 + X_2 \leq 5 \\ & X_1 + 3X_2 \leq 9 \\ & X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Gleichungssystem

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + Y_1 &= 5 \\ X_1 + 3X_2 + Y_2 &= 9 \\ -20X_1 - 30X_2 + F &= 0 \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem ist die Grundlage des **Simplex-Algorithmus** (Vorlesung 02).

Lösung mit Julia

Modellierung mit JuMP

Dasselbe Problem, gelöst mit Julia, JuMP und HiGHS:

```
using JuMP, HiGHS

modell = Model(HiGHS.Optimizer)
set_silent(modell)

@variable(modell, X1 >= 0)    # Abnahmemenge Auftrag 1
@variable(modell, X2 >= 0)    # Abnahmemenge Auftrag 2

@objective(modell, Max, 20X1 + 30X2)    # Umsatzerlöse in EUR

@constraint(modell, Paletten, X1 + X2 <= 5)    # max. 5 Paletten
@constraint(modell, Gewicht, X1 + 3X2 <= 9)    # max. 9 Tonnen

optimize!(modell)
println("F* = ", objective_value(modell),
        " mit X1 = ", value(X1), ", X2 = ", value(X2))
```

```
F* = 120.0 mit X1 = 3.0, X2 = 2.0
```

Ergebnis

Die Zelle liefert die bereits grafisch bestimmte Lösung:

! Optimale Lösung

$$F^* = 120, \quad X_1^* = 3, \quad X_2^* = 2$$

So können Sie Ihre Handrechnungen jederzeit überprüfen, mehr dazu im Abschnitt [Julia](#).

Zusammenfassung

Das Wichtigste auf einen Blick

- Ein **LOP** hat eine lineare Zielfunktion und lineare Nebenbedingungen.
- Bei zwei Variablen lösen wir **grafisch**; das Optimum liegt an einer **Ecke**.
- **Schlupfvariablen** ergeben das Gleichungssystem: Basis für den Simplex.
- Mit **Julia/JuMP** lösen wir dasselbe Modell rechnerisch.

Literatur

Literaturverzeichnis

Bibliografie

- [1] K. Haase u. a., „Improving pilgrim safety during the hajj: an analytical and operational research approach“, *Interfaces*, Bd. 46, Nr. 1, S. 74–90, 2016.
- [2] T. Vlček, K. Haase, M. Koch, L. Dolz, A. Weygandt, und J. Pape, „Controlling Passenger Flows into Metro Systems to Mitigate Overcrowding during large-scale Events“, *Working Paper*, 2023.
- [3] T. Vlček, K. Haase, M. Fliedner, und T. Cors, „Police service district planning“, *OR Spectrum*, S. 1–33, 2024.
- [4] M. Mickein, M. Koch, und K. Haase, „A Decision Support System for Brewery Production Planning at Feldschlösschen“, *INFORMS Journal on Applied Analytics*, Bd. 52, Nr. 2, S. 158–172, 2022.
- [5] K. Haase, J. Latteier, und A. Schirmer, „Course planning at Lufthansa technical training: Constructing more profitable schedules“, *Interfaces*, Bd. 29, Nr. 5, S. 95–109, 1999.
- [6] J. Desrosiers, A. Lasry, D. McInnis, M. M. Solomon, und F. Soumis, „Air Transat uses ALTITUDE to manage its aircraft routing, crew pairing, and work assignment“, *Interfaces*, Bd. 30, Nr. 2, S. 41–53, 2000.
- [7] B. G. Thomas u. a., „Automated bed assignments in a complex and dynamic hospital environment“, *Interfaces*, Bd. 43, Nr. 5, S. 435–448, 2013.
- [8] S. Jütte, M. Albers, U. W. Thonemann, und K. Haase, „Optimizing railway crew scheduling at DB Schenker“, *Interfaces*, Bd. 41, Nr. 2, S. 109–122, 2011.

- [9] M. A. Trick, H. Yildiz, und T. Yunes, „Scheduling major league baseball umpires and the traveling umpire problem“, *Interfaces*, Bd. 42, Nr. 3, S. 232–244, 2012.
- [10] S. Westphal, „Scheduling the German basketball league“, *Interfaces*, Bd. 44, Nr. 5, S. 498–508, 2014.